Geometrische Aufgaben

zum

Gebrauch bei Vorlesungen, beim Unterricht an
höhern Lehranstalten

und zum

Selbst-Studium,

von

L. Oettinger,
Professor in Heidelberg.

Zweite Abtheilung.

Karlsruhe,
in der Chr. Fr. Müller'schen Hofbuchhandlung.

1832.

Vorrede.

Bei den Aufgaben über das Viereck im Allgemeinen §. 379. u. ff. ist zu bemerken, daß nur die Fälle, wenn im Vierecke lauter hohle Winkel vorkommen, betrachtet, und diejenigen, wenn ein erhabener Winkel ABC (wie Fig. 591.) vorkommt, ganz ausser Acht gelassen sind. Dieß geschah, um keine Verwirrungen bei der Construction der Figuren herbei zu führen, was leicht zu befürchten ist, wenn die Construction der Figuren zu verwickelt werden würde. Auch in den Bemerkungen über die Eigenschaften des Viereckes im Allgemeinen §. 379 u. ff. ist aus dem nämlichen Grunde nur das Viereck mit hohlen Winkeln betrachtet. Daß aber die dort gemachten Bemerkungen nicht allein von dem genannten Vierecke, sondern auch von dem Vierecke mit einem erhabenen Winkel gelten, läßt sich leicht aus der Analogie, die zwischen beiden besteht, schließen und aus Fig. 591. rechtfertigen; denn die vier Mittelpunkte der Seiten erzeugen, auch hier das Parallelogramm abcd, worin die Halbirungslinien ac, bd Diagonalen sind; eben so erzeugen die Mittelpunkte der Diagonalen mit denen der gegenüberstehenden Seiten Parallelogramme, und die Mittelpunkte der Diagonalen und Halbirungslinien f, e, g liegen in einer geraden Linie u. s. w.

**

Nach diesen Bemerkungen ist die Construction der Aufgaben, die zwei Auflösungen zulassen, und das eine Mal ein Viereck mit hohlen, das andere Mal mit einem erhabenen Winkel, wie §. 403. u. a. erzeugen, zu beurtheilen. Die zweite Art ist bei den Auflösungen ausser Acht gelassen.

In den Auflösungen der Aufgaben über den Kreis, die eben so anziehend, als oft schwierig sind, sind manche Lehrsätze der Kürze wegen nur angeführt. Die Lehrbücher der Geometrie werden die hiezu nöthige Auskunft ertheilen. Hierüber sind die in der Vorrede zur ersten Abtheilung pag. X. u. ff. angeführten Werke von Unger (2ter Band, die Lehre von dem Kreise) Förstemann (1ter Band) und Haumann zu empfehlen.

Die Auflösung mancher Aufgaben über die größten und kleinsten Werthe beruht auf der Untersuchung der Wurzelausdrücke von folgender Form:

$$\sqrt{ay^2 - bx^2}$$

$$\text{oder } \sqrt{(ay - x)y}$$

Die Werthbestimmung der Größen aber auf folgender Ansicht: diese Ausdrücke liefern im Allgemeinen ein Minimum für y, wenn x als beständig betrachtet wird, und y als veränderlich; sie liefern ein Maximum für x, wenn y als beständig und x als veränderlich betrachtet wird.

Die Aufgaben über die größten und kleinsten Werthe gehören, wie bekannt, zu den anziehendsten, aber auch zu den schwierigsten.

Heidelberg im Dezember 1831.

Der Verfasser.

Inhalt.

Fünftes Kapitel.
Aufgaben über das Dreieck im Allgemeinen.

Sechstes Kapitel.
Aufgaben über das Viereck.

Siebentes Kapitel.
Aufgaben über den Kreis.

Achtes Kapitel.
Aufgaben über größte und kleinste Werthe.

Fünftes Kapitel.

Aufgaben über das Dreieck im Allgemeinen.

§. 233 — 317., Pag. 297 — 404.

A. Aufgaben über das Dreieck, wenn unter den gegebenen Elementen nur Seiten und Winkel vorkommen.

§. 233 — 244., Pag. 297 — 314.

Ein Dreieck zu bilden, wenn gegeben sind:

1. Zwei Seiten und der, einer von beiden gegenüberstehende, Winkel, §. 233.
2. Die Summe zweier Seiten und zwei Winkel, §. 234.
3. Der Unterschied zweier Seiten und die beiden, an der dritten Seite anliegenden, Winkel, §. 235.
4. Der Unterschied zweier Seiten, der von ihnen eingeschlossene und der, an der größern anliegende, Winkel, §. 235.
5. Der Unterschied zweier Seiten, der von ihnen eingeschlossene und der, an der kleinern anliegende, Winkel, §. 235.
6. Zwei Seiten und der Unterschied der beiden gegenüberstehenden Winkel, §. 236.
7. Die Summe zweier Seiten, die dritte und der ihr gegenüberstehende Winkel, §. 237.
8. Die Summe zweier Seiten, die dritte und ein, an der letztern liegender, Winkel, §. 238.
9. Der Unterschied zweier Seiten, die dritte und der ihr gegenüber liegende Winkel, §. 239.
10. Der Unterschied zweier Seiten, die dritte und der, der kleinern von jenen gegenüberliegende Winkel, §. 239.
11. Der Unterschied zweier Seiten, die dritte und der, der größern von jenen gegenüber liegende Winkel, §. 239.
12. Der Unterschied zweier Seiten, die dritte und der Unterschied der ihr anliegenden Winkel, §. 240.

Ein Dreieck zu bilden, wenn gegeben ist:
13. Die Summe zweier Seiten, die dritte und der Unterschied der ihr anliegenden Winkel, §. 241.
14. Die Summe der drei Seiten und zwei Winkel, §. 242.
15. Der Unterschied zwischen der Summe zweier Seiten und der dritten Seite und die an dieser anliegenden Winkel, §. 243.
16. Das Verhältniß zweier Seiten, die dritte und der ihr gegenüberstehende Winkel, §. 244.

B. Aufgaben über das Dreieck, wenn unter den gegebenen Elementen, Seiten, Winkel und die Höhe vorkommen.
§. 245 — 277., Pag. 315 — 356.

Ein Dreieck zu bilden, wenn gegeben sind:
1. Die Höhe und die zwei Winkel an der Grundlinie, §. 245.
2. Die Höhe, Grundlinie und der ihr gegenüberstehende Winkel, §. 246.
3. Die Höhe, Grundlinie und ein ihr anliegender Winkel, §. 247.
4. Die Höhe, Seite und der ihr gegenüberstehende Winkel, §. 248.
5. Die Höhe, eine Seite und der Winkel an der Spitze, §. 249.
6. Die Höhe, Grundlinie und eine Seite, §. 250.
7. Die Höhe und die zwei ihr anliegenden Seiten, §. 251.
8. Die Höhe, eine Seite und die Summe der Grundlinie und andern Seite, §. 252.
9. Die Höhe, eine Seite und der Ueberschuß der Grundlinie über die dritte Seite, §. 253.
10. Die Höhe, eine Seite und der Ueberschuß der dritten Seite über die Grundlinie, §. 254.
11. Die Höhe, Summe der Grundlinie und einen Seite und der von beiden eingeschlossene Winkel, §. 255.
12. Die Höhe, ein an der Grundlinie liegender Winkel und die Summe der beiden Seiten, §. 256.
13. Die Höhe, der Unterschied der zwei Seiten und der zwischen der Grundlinie und größern Seite liegende Winkel, §. 257.

Ein Dreieck zu bilden, wenn gegeben ist:
14. die Höhe, der Unterschied der beiden Seiten und der zwischen der Grundlinie und kleineren Seite liegende Winkel, §. 258.
15. Der Umfang, die Höhe und der Scheitelwinkel, §. 259.
16. Der Umfang, die Höhe und ein Winkel an der Grundlinie, §. 260.
17. Der Unterschied zwischen der Summe zweier Seiten und der dritten, die der dritten zugehörige Höhe und der ihr gegenüberstehende Winkel, §. 261.
18. Der Unterschied zwischen der Summe zweier Seiten und zwischen der dritten, die der dritten zugehörige Höhe und ein ihr anliegender Winkel, §. 262.
19. Die Grundlinie, ihre Höhe und die Höhe einer der beiden andern Seiten, §. 263.
20. Eine Seite und die den beiden andern zugehörigen Höhen, §. 264.
21. Zwei Höhen und der, von den ihnen zugehörigen Seiten eingeschlossene, Winkel, §. 265
22. Zwei Höhen und ein Winkel, durch dessen Spitze eine von diesen Höhen geht, §. 266.
23. Die drei Höhen, §. 267.
24. Die Summe zweier Seiten und die ihnen zugehörigen Höhen, §. 268.
25. Der Unterschied zweier Seiten und die ihnen zugehörigen Höhen, §. 269.
26. Zwei Seiten und die Summe der ihnen zugehörigen Höhen, §. 270.
27. Eine Seite, ihre Höhe und die Summe der beiden übrigen Seiten, §. 271.
28. Eine Seite, ihre Höhe und der Unterschied der beiden andern Seiten, §. 272.
29. Drei Punkte, welche die Auffallspunkte der drei Höhen eines Dreiecks bilden sollen, §. 273.
30. Zwei Punkte und zwei Linien; wenn eine Linie durch einen Punkt, die dritte Linie durch den zweiten Punkt gehen soll, die beiden Punkte aber die Auffallspunkte für die, ihren Seiten zugehörigen, Höhen bilden, §. 274.

Ein Dreieck zu bilden, wenn gegeben ist:
31. Ein Winkel, die Höhe, die durch seine Spitze geht und das Verhältniß der beiden ihn einschließenden Seiten, §. 275.
32. Ein Winkel, eine anliegende Seite und das Verhältniß, worin die dem Winkel gegenüberstehende Seite zu der ihr zugehörigen Höhe steht, §. 276.
33. Eine Seite, die der zweiten zugehörige Höhe und das Verhältniß, worin die zweite Seite zur dritten steht, §. 277.

C. Aufgaben über das Dreieck, wenn unter den gegebenen Elementen, Seiten, Winkel, Höhen und Abschnitte der Grundlinie vorkommen.

§. 278 — 300., Pag. 357 — 391.

Ein Dreieck zu bilden, wenn gegeben sind:
1. die Abschnitte der Grundlinie und eine anliegende Seite, §. 279.
2. Die Abschnitte der Grundlinie und die ihnen zugehörige Höhe, §. 280.
3. Die beiden Abschnitte und ein anliegender Winkel, §. 281.
4. Die Abschnitte einer Seite und der ihnen gegenüberstehende Winkel, §. 282 und 283.
5. Die Abschnitte der Grundlinie und die Summe der beiden andern Seiten, §. 284.
6. Die Abschnitte der Grundlinie und der Unterschied der beiden andern Seiten, §. 285.
7. Der Unterschied der Abschnitte einer Seite, die beiden andern Seiten, §. 286.
8. Die Abschnitte einer Seite, Summe der Höhe und einer andern Seite, §. 287.
9. Der Unterschied zwischen der größern Seite und der Höhe und die Abschnitte der Grundlinie, §. 288.
10. Der Unterschied zwischen der kleinern Seite und Höhe und die beiden Abschnitte der Grundlinie, §. 288.
11. Der Unterschied zwischen beiden Abschnitten, die größere Seite und der zwischen ihr und dem größern Abschnitte liegende Winkel, §. 289.

Ein Dreieck zu bilden, wenn gegeben ist:

12. der Unterschied der beiden Abschnitte, die kleinere Seite und der zwischen ihr und dem kleinern Abschnitte liegende Winkel, §. 289.
13. Der Unterschied der beiden Abschnitte, die größere Seite und die Höhe, §. 290.
14. Die Unterschied der beiden Abschnitte, die kleinere Seite und Höhe, §. 290.
15. Der Unterschied der beiden Abschnitte, die Höhe und der von der größern Seite und Grundlinie eingeschlossene Winkel, §. 291.
16. Der Unterschied der beiden Abschnitte, die Höhe und der von der kleinern Seite und der Grundlinie eingeschlossene Winkel, §. 291.
17. Der Unterschied der beiden Abschnitte einer Seite, die Summe der beiden andern und der, der kleinern entgegenstehende, Winkel, §. 292.
18. Der Unterschied der beiden Abschnitte, die Summe der beiden andern und der, der größern Seite gegenüber liegende, Winkel, §. 292.
19. Der Unterschied der beiden Abschnitte der Grundlinie, die Summe der beiden andern Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel, §. 293.
20. Der Unterschied der beiden Abschnitte, der Unterschied der beiden andern Seiten und der zwischen der größern Seite und Grundlinie liegende Winkel, §. 294.
21. Der Unterschied der beiden Abschnitte, der Unterschied der beiden andern Seiten und der, an der kleinern Seite liegende, Winkel, §. 294.
22. Der Unterschied zwischen den beiden Abschnitten der Grundlinie, der zwischen den beiden andern Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel, §. 295.
23. Der Unterschied der beiden Abschnitten der Grundlinie, die Summe der beiden andern Seiten, der Unterschied der Winkel an der Grundlinie, §. 296.
24. Die Höhe, der Unterschied der Abschnitte der Grundlinie und ein ihr anliegender Winkel, §. 297.

Ein Dreieck zu bilden, wenn gegeben ist:
25. die Abschnitte einer Seite und der anliegende Abschnitt einer der beiden andern, §. 298.
26. Ein Abschnitt, die ihm zugehörige Höhe, und die Höhe, welche der Seite zugehört, die an dem andern Abschnitte der Grundlinie liegt, §. 299.
27. Ein Abschnitt einer Seite, die ihm zugehörige Höhe, und die Höhe, welche der Seite zugehört, die dem gegebenen Abschnitte anliegt, §. 300.

D. Aufgaben über das Dreieck, wenn unter den gegebenen Elementen auch die Halbirungs-Linien der Seiten und Winkel vorkommen.

§. 301 — 317., Pag. 392 — 404.

Ein Dreieck zu bilden, wenn gegeben sind:
1. Ein Winkel, die ihn halbirende Seite und ein zweiter Winkel, §. 301.
2. Die, eine Seite halbirende, Linie, der Winkel, durch dessen Spitze sie geht, und ein zweiter Winkel, §. 302.
3. Eine Seite, der gegenüberstehende Winkel, die ihn halbirende Linie, §. 303.
4. Eine Seite, ihre Halbirungslinie und ein, der Seite anliegender, Winkel, §. 304.
5. Eine Seite, die Halbirungslinie und der, der Seite gegenüberstehende, Winkel, §. 305.
6. Eine Seite, ihre Halbirungslinie und eine anliegende Seite, §. 306.
7. Zwei Seiten und die Halbirungslinie der dritten, §. 307.
8. Die Halbirungslinie des Scheitelwinkels, die Höhe und der, dem größern Abschnitte anliegende, Winkel, §. 308.
9. Die Halbirungslinie des Scheitelwinkels, die Höhe und der, am kleinern Abschnitte liegende, Winkel, §. 309.
10. Der Scheitelwinkel, seine Halbirungslinie und die Höhe, §. 310.
11. Die Höhe, ein Winkel an der Grundlinie und die Halbirungslinie der letztern, §. 311.

Ein Dreieck zu bilden, wenn gegeben ist:
12. die Höhe, die Grundlinie und ihre Halbirungslinie, §. 312.
13. die Höhe und Halbirungslinie einer Seite und der ihr gegenüberstehende Winkel, §. 313.
14. Ein Winkel, seine Halbirungslinie und der Umfang eines Dreiecks, §. 314.
15. Ein Winkel, seine Halbirungslinie und der Unterschied zwischen der Summe der ihn einschließenden Seiten und zwischen der dritten, §. 315.
16. Eine Seite und die, den beiden andern zugehörigen, Halbirungslinien, §. 316.
17. Eine Seite, ihre Halbirungslinie und eine zweite Halbirungslinie, §. 317.

Sechstes Kapitel.

Aufgaben über das Viereck.

§. 318 — 412., Pag. 405 — 498.

A. Aufgaben über das Quadrat.

§. 318 — 321., Pag. 407 — 410.

Ein Quadrat zu bilden, wenn gegeben ist:
1. die Seite, §. 318.
2. Die Diagonale, §. 319.
3. Die Summe der Diagonale und Seite, §. 320.
4. Der Unterschied zwischen der Diagonale und Seite, §. 321.

B. Aufgaben über das Rechteck.

§. 322 — 334., Pag. 411 — 424.

Ein Rechteck zu bilden, wenn gegeben sind:
1. zwei Nachbarseiten, §. 322.
2. Die Diagonale und eine Seite, §. 323.
3. Die Diagonale und die Summe zweier Nachbarseiten, §. 324.
4. Die Diagonale und der Unterschied zweier Nachbarseiten §. 325.

Ein Rechteck zu bilden, wenn gegeben ist:
5. eine Seite und die Summe der Diagonale und andern Seite, §. 326.
6. Eine Seite und der Unterschied zwischen der Diagonale und andern Seite, §. 327.
7. Die kleinere Seite und der Unterschied zwischen den, an der Diagonale liegenden, Winkeln, §. 328.
8. Die größere Seite und der Unterschied der, an der Diagonale liegenden, Winkel, §. 328.
9. Die Summe der beiden Seiten und der Diagonale und ein an dieser liegender Winkel, §. 329.
10. Der Unterschied zwischen der Summe zweier Seiten und der Diagonale und ein, an der Diagonale liegender, Winkel, §. 330.
11. Eine Seite und der Inhalt, §. 331.
12. Die Summe der beiden Seiten und der Inhalt, §. 332.
13. Der Umfang und Inhalt, §. 332.
14. Der Unterschied der beiden Seiten und der Inhalt, §. 333.
15. Der Inhalt und die Diagonale, §. 334.

C. Aufgaben über den Rhombus.

§. 335 — 351., Pag. 425 — 439.

Einen Rhombus zu bilden, wenn gegeben sind:
1. Die Diagonale und Seite, §. 335.
2. Die Diagonale und der Winkel, durch dessen Spitze sie geht, §. 336.
3. Die Diagonale und der gegenüberstehende Winkel, §. 337.
4. Die Summe der Seite und Diagonale und Winkel, durch dessen Spitze die Diagonale geht, §. 338.
5. Die Summe der Seite und Diagonale und der, letzterer gegenüberstehende, Winkel, §. 338.
6. Der Unterschied zwischen der Diagonale und Seite und der Winkel, durch dessen Spitze die Diagonale geht, §. 839.
7. Der Unterschied zwischen der Seite und Diagonale und der, letzterer gegenüberstehende, Winkel, §. 339.
8. Die beiden Diagonalen, §. 340.
9. Der Unterschied zwischen beiden Diagonalen und eine Seite, §. 341.

Einen Rhombus zu bilden, wenn gegeben ist:
10. der Unterschied zwischen beiden Diagonalen und der Winkel, durch dessen Spitze die größere geht, §. 342.
11. Der Unterschied zwischen beiden Diagonalen und der Winkel, durch dessen Spitze die kleinere Diagonale geht, §. 342.
12. Die Summe der Diagonalen und die Seite, §. 343.
13. Die Summe der Diagonalen und der Winkel, durch dessen Spitze die größere Diagonale geht, §. 344.
14. Die Summe der Diagonalen und der Winkel, durch dessen Spitze die kleinere Diagonale geht, §. 344.
15. Die Seite und Höhe, §. 345.
16. Die Summe der Seite und Höhe und der stumpfe Winkel, §. 346.
17. Die Summe der Seite und Höhe und der spitze Winkel, §. 346.
18. Der Unterschied zwischen der Seite und Höhe und der stumpfe Winkel, §. 347.
19. Der Unterschied zwischen der Seite und Höhe und der spitze Winkel, §. 347.
20. Die Höhe und Diagonale, §. 348.
21. Die Seite und der Inhalt, §. 349.
22. Der Inhalt und die Diagonale, §. 350.
23. Der Inhalt und die Höhe, §. 351.

D. Aufgaben über das Rhomboid.

§. 352 — 366., Pag. 440 — 452.

Ein Rhomboid zu bilden, wenn gegeben sind:
1. zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel, §. 352.
2. Die beiden Diagonalen und eine Seite, §. 353.
3. Die Summe zweier Nachbarseiten und die durch ihren Vereinigungspunkt gehende Diagonale und der, zwischen ihr und einer der Seiten liegende, Winkel, §. 354.
4. Die Diagonale, der Winkel, durch dessen Spitze sie geht, und die Summe der ihn umschließenden Seiten, §. 355.
5. Die Diagonale, der ihr gegenüberstehende Winkel, die Summe der ihn umschließenden Seiten, §. 356.

Ein Rhomboid zu bilden, wenn gegeben ist:
6. Die Diagonale, der Winkel, durch dessen Spitze sie geht, der Unterschied der, ihn umschließenden, Seiten, §. 357.
7. Die Diagonale, der Winkel, der ihr gegenübersteht und der Unterschied der, ihn umschliessenden, Seiten, §. 357.
8. Die Diagonale, der Unterschied der beiden ihr anliegenden Winkel und der Unterschied zwischen zwei Nachbarseiten, §. 358.
9. Die beiden Diagonalen und der Winkel, durch dessen Spitze die größere Diagonale geht, §. 359.
10. Die beiden Diagonalen und der Winkel, durch dessen Spitze die kleinere Diagonale geht, §. 359.
11. Eine Seite, die Summe der Diagonale und andern Seite und der Winkel, durch dessen Spitze die Diagonale geht, §. 360.
12. Eine Seite, die Summe der Diagonale und andern Seite und der Winkel, welcher der Diagonale gegenübersteht, §. 361.
13. Eine Seite, Unterschied zwischen der Diagonale und andern Seite, und der Winkel, durch dessen Spitze die Diagonale geht, §. 362.
14. Eine Seite, der Unterschied zwischen der Diagonale und andern Seite und der, letzterer gegenüberstehende, Winkel, §. 362
15. Zwei Seiten und eine Höhe, §. 363.
16. Die Höhe, die Diagonale, welche die Höhe durchschneidet, und die, der Höhe zugehörige, Seite, §. 364.
17. Die Diagonale, eine Seite und die, der andern zugehörige, Höhe §. 365.
18. Die beiden Diagonalen und die kleinere Höhe, §. 366.
19. Die beiden Diagonalen und die größere Höhe, §. 366.

E. Aufgaben über das Trapez.

§. 367 — 378., Pag. 453 — 461.

Ein Trapez zu bilden, wenn gegeben sind:
1. die vier Seiten, §. 367.
2. Drei Seiten und ein an der vierten liegender Winkel, §. 368.

3. Die

Ein Trapez zu bilden, wenn gegeben sind:

3. Die beiden Parallelseiten und die gegenüberstehenden Winkel, §. 369.
4. Die beiden Parallelseiten und die, an der größern anliegenden, Winkel, §. 370.
5. Die beiden Parallelseiten und die, an der kleinern liegenden, Winkel, §. 370.
6. Die beiden divergirenden Seiten, eine Parallele und die Summe der, an einer von beiden Parallelseiten liegenden, Winkel, §. 371.
7. Die zwei Parallelseiten, die ihnen zugehörige Halbirungs-Linie und eine dritte Seite, §. 372.
8. Eine Parallelseite, die ihr zugehörige Halbirungslinie und die zwei anliegendeen Winkel, §. 373.
9. Die beiden Diagonalen und beiden Parallelseiten, §. 374.
10. Zwei Nachbarseiten und zwei gegenüberstehenden Winkel, §. 375.
11. Zwei Nachbarseiten, der eingeschlossene und der, einer Seite gegenüberstehende, Diagonal-Winkel, §. 376.
12. Ein Winkel, die zwei ihn umschließenden Seiten und die Summe der beiden übrigen, §. 377.
13. Ein Winkel, die zwei ihn umschließenden Seiten und der Unterschied der beiden übrigen, §. 378.

F. Aufgaben über das Viereck im Allgemeinen.

§. 379 — 412., Pag. 462 — 498.

Eigenschaften des Viereckes.

§. 379 — 382.

Ein Viereck zu bilden, wenn gegeben sind:

1. Drei Seiten, ein eingeschlossener und der diesem gegenüberstehende Winkel, §. 383.

*

Ein Viereck zu bilden, wenn gegeben sind:

2. Drei Seiten und die zwei, an der vierten liegenden, Winkel, §. 384.

3. Drei Winkel und zwei gegenüberstehende Seiten, §. 385.

4. Zwei Nachbarseiten, der eingeschlossene und der, ihm gegenüberstehende, Winkel, und die Diagonale, welche die Spitzen der beiden Winkel verbindet, §. 386.

5. Eine Diagonale, eine Seite und drei Winkel, §. 387.

6. Zwei Diagonalen, zwei anliegende Seiten und der, von den nicht gegebenen Seiten eingeschlossene, Winkel, §. 388.

7. Die zwei Diagonalen, zwei gegenüberstehende Seiten und die Summe der, an einer nicht gegebenen Seite anliegenden, Winkel, §. 389.

8. Zwei Diagonalen, zwei gegenüberstehende Seiten und die sie halbirende Linie, §. 390.

9. Zwei Diagonalen, zwei gegenüberstehende Seiten und die, den beiden andern zugehörige, Halbirungslinie, §. 391.

10. Drei Seiten und die zwei Diagonalen, §. 392.

11. Eine Diagonale, drei Seiten und die, den zwei gegenüberstehenden Seiten zugehörige, Halbirungslinie, §. 393.

12 Drei Seiten, eine Diagonale und die, der vierten Seite zugehörige, Halbirungslinie, §. 394.

13. Zwei Halbirungslinien, zwei Nachbarseiten und die Diagonale, welche durch ihren Vereinigungspunkt geht, §. 395.

14. Zwei Nachbarseiten, der von ihnen eingeschlossene Winkel, die durch seine Spitze gehende Diagonale und eine Halbirungslinie, §. 396.

15. Zwei Diagonalen, eine Halbirungslinie und zwei gegenüberstehende Winkel, §. 397.

16. Die zwei Diagonalen, eine Halbirungslinie und zwei, an einer Seite liegende, Winkel, §. 398.

17. Die zwei Diagonalen, eine Halbirungslinie, die ihr nicht zugehörige Seite und die Summe zweier, nicht anliegender, Winkel, §. 399

Ein Viereck zu bilden, wenn gegeben sind:

18. Zwei Nachbarseiten, die ihnen zugehörige Diagonale, der ihnen gegenüberstehende Winkel und eine Halbirungslinie, §. 400.

19. Zwei Nachbarseiten, die, ihnen zugehörige, Diagonale, eine Halbirungslinie und der Winkel, welchen die zweite Diagonale mit einer der nicht gegebenen Seiten bildet, §. 401.

20. Die zwei Halbirungslinien, eine Seite, eine Diagonale und der, ihr gegenüberstehende, aber der gegebenen Seite nicht anliegende, Winkel, §. 402.

21. Die zwei Halbirungslinien, eine Seite, eine Diagonale und der Winkel, durch dessen Spitze die Diagonale geht, der aber der gegebenen Seite nicht anliegt, §. 403.

22. Ein Winkel, die anliegenden Seiten und die zwei Halbirungslinien, §. 404.

23. Ein Winkel, die anliegende Seite, die ihr gegenüberstehende und die beiden Halbirungslinien, §. 405.

24. Vier Seiten und die Summe der zwei, an einer Seite liegenden, Winkel, §. 406.

25. Vier Seiten und eine Halbirungslinie, §. 407.

26. Drei Winkel, eine Seite und die ihr nicht zugehörige Halbirungslinie, §. 408.

27. Drei Winkel, eine Seite und die ihr zugehörige Halbirungslinie, §. 409.

28. Zwei gegenüberstehende Seiten, die zwei, einer von ihnen anliegenden, Winkel und die den beiden andern zugehörige Halbirungslinie, §. 410.

29. Der Umfang, eine Diagonale, der Winkel, den sie mit einer Seite bildet, und die zwei dieser Seite anliegenden Winkel, §. 411.

**

Ein Viereck zu bilden, wenn gegeben sind:

30. Der Umfang, eine Diagonale, der Winkel, den sie mit der anliegenden, Seite bildet, die beiden, der Diagonale gegenüberstehenden, Winkel, §. 412.

31. Zwei Nachbarseiten, der von ihnen eingeschlossene Winkel und die beiden Partialwinkel, in welche die Diagonale den gegenüberstehenden Winkel theilt, §. 63.

Siebentes Kapitel.

Aufgaben über den Kreis.

§. 413—484., Pag. 499—586.

A. Aufgaben über Linien und Winkel in und am Kreise.

§. 413 — 422., Pag. 501 — 514.

1. Zu einem gegebenen Kreisbogen, oder Kreisumfange den Mittelpunkt zu finden, §. 413.

2. An einen gegebenen Punkt in dem Kreisumfange eine Tangente zu ziehen, §. 414.

3. Von einem gegebenen Punkte ausserhalb eines Kreises eine Tangente an den Kreis zu ziehen, §. 415.

4. An zwei Kreise eine gemeinschaftliche Tangente zu ziehen, §. 416.

5. Eine Sehne von bestimmter Größe durch einen im Kreise gegebenen Punkt zu ziehen, §. 417.

6. Ueber einer gegebenen Linie einen Kreisbogen zu beschreiben, der einen gegebenen Winkel faßt, §. 418.

7. Man soll in einem Kreise einen Durchmesser so ziehen, daß die, aus zwei im Umfange gegebenen Punkten auf jenen gefällten, Perpendikel einen der Größe nach gegebenen Theil des Durchmessers zwischen sich fassen, §. 419.

8. Man soll von den Endpunkten einer Linie an einen Punkt in der Peripherie eines gegebenen Kreises zwei Linien so ziehen, daß sie einen bestimmten Winkel bilden, §. 420.

9. Man soll in einem Kreisabschnitte, der einen bestimmten Winkel faßt, einen Punkt bestimmen, daß die, von den Endpunkten der Sehne zu ihm gezogenen, Linien in einem gegebenen Verhältniße stehen, §. 421.

10. Man soll von einem Punkte ausserhalb eines Kreises eine Sekante zu dem Kreise ziehen, daß der im Kreis liegende Theil eine bestimmte Größe hat, §. 422.

B. Aufgaben über die in und um den Kreis beschriebenen Figuren.

§. 423 — 453., Pag. 515 — 548.

Einen Kreis zu beschreiben:

1. Um ein Dreieck, §. 423.

2. Durch drei gegebene Punkte, §. 423.

3. Um ein Rechteck, §. 424.

4. Um ein Quadrat, §. 424.

5. Um ein Viereck, worin sich zwei gegenüberstehende Winkel zu zwei Rechten ergänzen, §. 425.

6. Um ein Trapez, dessen gegenüberstehende Winkel sich zu zwei Rechten ergänzen, §. 425.

7. In ein Dreieck, §. 426.

8. In ein Quadrat, §. 427.

9. In ein Dreieck einen Halbkreis zu beschreiben, §. 428.

10. In einen Quadranten einen Kreis zu beschreiben, §. 429.

11. In einen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, das einem andern ähnlich ist, §. 430.

12. In einen Kreis ein gleichseitiges Dreieck zu beschreiben, §. 430.

13. Um einen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, das einem gegebenen ähnlich ist, §. 431.

14. In einen Kreis ein Quadrat zu beschreiben, §. 432.

15. Um einen Kreis ein Quadrat zu beschreiben, §. 433.

16. In einen Kreis ein regelmäßiges Fünfeck zu beschreiben, §. 434.

17. Um einen Kreis ein regelmäßiges Fünfeck zu beschreiben, §. 435.

18. In einen Kreis ein regelmäßiges Sechseck zu beschreiben, §. 436.

19. Um einen Kreis ein regelmäßiges Sechseck zu beschreiben, §. 437.

20. In einen Kreis ein rechtwinkliges Dreieck zu beschreiben, das einen gegebenen Inhalt hat, §. 438.

21. In einen Kreis ein Rechteck zu beschreiben, das einen gegebenen Flächeninhalt enthält, §. 439.

Ein Dreieck im Kreise zu bilden, wenn gegeben ist:

22. Eine Seite, und ein anliegender Winkel, §. 440.

23. Zwei Winkel, §. 441.

24. Die Summe zweier Seiten und ein nicht eingeschlossener Winkel, §. 442.

25. Die Summe zweier Seiten, und der von ihnen eingeschlossene Winkel, §. 443.

26. Der Umfang und ein Winkel, §. 444.

27. Eine Seite und die Summe der beiden andern, §. 445.

28. Der Unterschied zweier Seiten und der, an der kleinern liegende, Winkel, §. 446.

Ein Dreieck im Kreise zu bilden, wenn gegeben ist:

29. Der Unterschied zweier Seiten und der, an der größern Seite liegende, Winkel, §. 446.

30. Der Unterschied zweier Seiten und der eingeschlossene Winkel, §. 447.

31. Die größte Seite und der Unterschied der beiden übrigen, §. 448.

32. Der Unterschied zweier Seiten und eine der kleinern Seiten, §. 448.

33. Ein Winkel und die Höhe, welche durch seine Spitze geht, §. 449.

Ein Dreieck um einen Kreis zu bilden, wenn gegeben ist:

34. Zwei Winkel, §. 450.

35. Eine Seite und ein anliegender Winkel, §. 451.

36. Eine Seite und der gegenüberstehende Winkel, §. 452.

37. Ein Winkel und der Umfang, §. 453.

C. Aufgaben über Berührungen.

§. 454 — 484., Pag. 549 — 586.

Einen Kreis mit gegebenem Halbmesser zu beschreiben:

1. Der zwei convergirende Linien berührt, §. 454.

2. Der eine gegebene Linie berührt und durch einen gegebenen Punkt geht, §. 455.

3. Der einen gegebenen Kreis und eine ausser ihm liegende Linie berührt, §. 456.

4. Der einen Kreis von aussen und eine durchschneidende Linie berührt, §. 456.

5. Der einen Kreis von innen und eine durchschneidende Linie berührt, §. 456,

6. Der einen Kreis berührt und durch einen ausser ihm liegenden Punkt geht, §. 457.

7. Der einen Kreis berührt und durch einen in ihm liegenden Punkt geht, §. 458.

Einen Kreis mit gegebenem Halbmesser zu beschreiben:

8. Der zwei Kreise von aussen berührt, §. 459.

9. Der zwei Kreise einschließend berührt, §. 460.

10. Der zwei Kreise, den einen einschließend, den andern von aussen berührt, §. 461.

Einen Kreis zu beschreiben:

11. Der zwei convergirende Linien berührt, die eine aber in einem gegebenen Punkte, §. 462.

12. Der eine Linie in einem gegebenen Punkte berührt und durch einen gegebenen Punkt geht, §. 463.

13. Der einen Kreis in einem gegebenen Punkte der Peripherie berührt und durch, einen ausser ihm liegenden, Punkt, geht, §. 464.

14. Der einen Kreis in einem gegebenen Punkte der Peripherie berührt und durch einen Punkt in ihm geht, §. 464.

15. Der einen Kreis in einem gegebenen Punkte der Peripherie und eine, ausser ihm liegende Linie, berührt, §. 465.

16. Der einen Kreis in einem gegebenen Punkte seiner Peripherie einschließend und eine, ausser ihm liegende Linie, berührt, §. 465.

17. Der einen Kreis in einem gegebenen Punkte von aussen und eine durchschneidende Linie berührt, §. 465.

18. Der einen Kreis in einem gegebenen Punkte von innen und eine durchschneidende Linie berührt, §. 465.

19. Der einen Kreis von aussen und eine ausser ihm gegebene Linie in einem bestimmten Punkte berührt, §. 466.

20. Der einen Kreis einschießend und die gegebene Linie in einem bestimmten Punkte berührt, §. 466.

21. Der zwei Kreise ausschließend berührt, den einen aber in einem gegebenen Punkte, §. 467.

22. Der zwei Kreise einschließend berührt, den einen aber in einem gegebenen Punkte, §. 467.

Einen Kreis zu beschreiben:

23. Der eine Linie berührt, seinen Mittelpunkt in einer, mit jener convergirenden, Linie liegen hat, und durch einen, zwischen beiden Linien liegenden, Punkt geht, §. 468.

24. Der zwei convergirende Linien berührt, und durch einen, zwischen beiden liegenden, Punkt geht, §. 468.

25. Der eine Linie berührt, und durch zwei, auf einer Seite von ihr liegende, Punkte geht, §. 469.

26. Der zwei sich durchschneidende Linien und einen, zwischen beiden liegenden, Kreis ausschließend berührt, §. 470.

27. Der zwei sich durchschneidende Linien und einen, zwischen beiden liegenden, Kreis einschließend berührt, §. 470.

28. Der zwei sich durchschneidende Linien und einen, diese Linien berührenden, Kreis berührt, §. 471.

29. Der eine Linie, einen Kreis ausschließend berührt, und durch einen gegebenen Punkt geht, §. 472.

30. Der eine Linie, einen Kreis einschließend berührt, und durch einen gegebenen Punkt geht, §. 473.

31. Der zwei gleiche Kreise ausschließend und eine, ausser ihnen liegende, Linie berührt, §. 474.

32. Der zwei gleiche Kreise einschließend und eine Linie berührt, §. 474.

33. Der zwei ungleiche Kreise ausschließend und eine Linie berührt, §. 475.

34. Der zwei ungleiche Kreise einschließend und eine Linie berührt, §. 475.

35. Der zwei ungleiche Kreise, den einen ein-, den andern ausschließend und eine Linie berührt, §. 476.

36. Der zwei gleiche Kreise unter den nämlichen Bedingungen berührt, §. 476.

37. Der einen Kreis berührt und durch zwei, ausser ihm liegende, Punkte geht, §. 477.

38. Der einen Kreis berührt und durch zwei, in ihm liegende, Punkte geht, §. 478.

Einen Kreis zu beschreiben:

39. Der zwei ungleiche Kreise ausschließend berührt und durch einen, ausser ihnen liegenden, Punkt geht, §. 480.

40. Der zwei ungleiche Kreise einschließend berührt und durch einen, ausser ihnen liegenden, Punkt geht, §. 481.

41. Der zwei ungleiche Kreise, den einen ein=, den andern ausschließend berührt und durch einen, ausser ihnen liegenden, Punkt geht, §. 482.

42. Der zwei ungleiche Kreise und ein Punkt unter den nämlichen Bedingungen berührt, §. 482.

43. Der drei ungleiche Kreise ausschließend berührt, §. 483.

44. Der drei ungleiche Kreise einschließend berührt, §. 483.

45. Der drei ungleiche Kreise, zwei ein= und einen ausschließend berührt, §. 483.

46. Der drei ungleiche Kreise, zwei aus= und einen einschließend berührt, §. 483.

47. Man soll in einen Kreis drei gleiche Kreise beschreiben, die sich und den gegebenen Kreis berühren, §. 484.

Achtes Kapitel.

Aufgaben über größte und kleinste Werthe.

§. 485 — 524., Pag. 587 — 639.

1. Man soll von den Endpunkten einer Linie an einen Punkt in einer, der Lage nach gegebenen, Linie zwei Linien ziehen, daß ihre Summe ein Kleinstes sey, §. 485.

2. Von drei, in einer stetigen Proportion stehenden, Linien ist die Summe der beiden äussern gegeben. Man soll

die größere und mittlere so bestimmen, daß ihre Summe ein Größtes sey, §. 486.

3. Unter den nämlichen Bedingungen soll man die größere und mittlere so bestimmen, daß ihre Summe ein Kleinstes sey, §. 487.

4. Man soll über einer gegebenen Linie einen Winkel so antragen, daß die Summe der ihn umschließenden Schenkel ein Größtes sey, §. 488.

5. Ueber einer gegebenen Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck so zu bestimmen, daß die Summe der Katheten ein Größtes sey, §. 488.

6. Es ist ein Winkel und seine Schenkelsumme gegeben. Man soll die Schenkel so bestimmen, daß die ihre Endpunkte verbindende Linie ein Kleinstes ist, §. 489.

7. Es ist die Summe der Katheten gegeben. Man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bestimmen, dessen Hypotenuse ein Kleinstes ist, §. 489.

8. Durch einen, in einem Kreise liegenden, Punkt eine Sehne zu ziehen, deren Länge ein Größtes ist, §. 490.

9. Durch einen, in einem Kreise liegenden, Punkt eine Sehne zu ziehen, deren Länge ein Kleinstes ist, §. 491.

10. Auf dem Durchmesser eines Kreises eine senkrechte Linie zu errichten, deren Länge ein Größtes ist, §. 492.

11. Es ist die Seite eines Dreieckes und der gegenüberstehende spitze Winkel gegeben. Man soll daraus ein stumpfwinkliges Dreieck bilden, daß der Abstand des Auffallspunktes, der von dem spitzen Winkel auf die Verlängerung der gegebenen Seite gefällten, Höhe von dem einen Endpunkte der gegebenen Seite ein Größtes sey, §. 493.

12. Es ist der Unterschied der Abschnitte der Grundlinie und der Unterschied der zwei, an der Grundlinie liegenden, Winkel gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden, worin die Abschnitte den gegebenen Unterschied haben und die Grundlinie ein Größtes ist, §. 494.

13. Ein Dreieck zu bilden, dessen Halbirungslinie ein Größtes ist, wenn die halbirte Seite und der gegenüberstehende Winkel gegeben ist, §. 495.

14. Unter den nämlichen Bedingungen soll ein Dreieck gebildet werden, dessen Höhe ein Größtes ist, §. 495.

15. Aus der Höhe und Grundlinie ein Dreieck zu bilden, worin die Summe der beiden andern Seiten ein Kleinstes ist, §. 496.

16. Ueber einer Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck zu bilden, worin die Summe des kleinern Abschnittes und der Höhe ein Größtes ist, §. 497.

17. Ueber einer Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck zu bilden, worin die Summe des größern Abschnittes und der Höhe ein Kleinstes ist, §. 498.

18. Ueber einer Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck zu bilden, worin die Summe des größern Abschnittes und der Höhe ein Größtes ist, §. 499.

19. Ueber einer Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck zu bilden, worin die Summe der kleinern Kathete und des größern Abschnittes ein Größtes ist, §. 500.

20. Aus der Summe der Grundlinie und Höhe ein gleichschenkliges Dreieck zu bilden, worin der Schenkel ein Kleinstes ist, §. 501.

21. Ueber einer Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck zu bilden, worin der Ueberschuß des Höhenquadrates über das Quadrat des kleinern Abschnittes ein Größtes ist, §. 502.

22. Ueber einer Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck zu bilden, worin der Unterschied zwischen der kleinern Kathete und dem an der andern liegenden Abschnitte ein Kleinstes ist, §. 503.

23. Ueber einer Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck zu bilden, worin das Unterschiedsquadrat zwischen dem größern Abschnitte und der kleinern Kathete ein Kleinstes ist, §. 503.

24. Ueber einer Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck zu bilden, worin der Unterschied zwischen der Kathete und dem anliegenden Abschnitte ein Größtes ist, §. 504.

25. Aus der Grundlinie und der Summe der beiden andern Seiten ein Dreieck zu bilden, dessen Flächeninhalt ein Größtes ist, §. 505.

26. Man soll eine Linie so in zwei Theile theilen, daß das aus beiden Theilen gebildete Rechteck ein Größtes ist, §. 506.

27. Eine Linie so in zwei Theile theilen, daß das aus diesen Seiten und einem bestimmten Winkel gebildete Parallelogramm den größt möglichen Inhalt habe, §. 507.

28. Eine Linie so in zwei Theile theilen, daß ein daraus gebildetes Dreieck sie als Seiten und einen von ihnen umschlossenen Winkel habe, dessen Inhalt ein Größtes ist, §. 508.

29. Eine Linie so in zwei Theile theilen, daß die Summe zweier auf ihnen gebildeten Quadrate ein Kleinstes sey, §. 509.

30. In ein ungleichseitiges Dreieck ein Parallelogramm beschreiben, das einen Winkel mit ihm gemeinschaftlich hat und dessen Inhalt ein Größtes ist, §. 510.

31. In ein ungleichseitiges Dreieck ein Rechteck beschreiben, dessen Inhalt ein Größtes ist, §. 511.

32. Eine Linie in zwei Theile theilen, daß das, aus ihnen gebildete, Parallelogramm den größt möglichen Inhalt habe, §. 512.

33. Unter den nämlichen Bedingungen ein Dreieck zu bilden, das den größt möglichen Inhalt hat, §. 513.

34. Ein Dreieck von bestimmtem Umfange zu bilden, das den größt möglichen Inhalt hat, §. 514.

35. Ein Parallelogramm von bestimmtem Umfange zu bilden, das den größt möglichen Inhalt hat, §. 515.

36. Ein Dreieck von bestimmtem Umfange und Winkel zu bilden, das den größt möglichen Inhalt hat, §. 516.

37. Ein Dreieck von bestimmtem Umfange und bestimmter Höhe zu bilden, das den größt möglichen Inhalt hat, §. 517.

38. Aus zwei Nachbarseiten, dem eingeschlossenen und gegenüberstehenden Winkel ein Viereck zu bilden, dessen Umfang ein Größtes ist, §. 518.

39. Unter den nämlichen Bedingungen ein Viereck zu bilden, dessen Inhalt ein Größtes ist, §. 518.

40. Unter den nämlichen Bedingungen ein Viereck zu bilden, dessen Diagonale die größt mögliche ist, §. 519.

41. Aus einer Diagonale und den beiden gegenüberstehenden Winkeln ein Viereck zu bilden, dessen Umfang ein Größtes ist, §. 520.

42. Unter den nämlichen Bedingungen ein Viereck zu bilden, dessen Inhalt ein Größtes ist, §. 520.

43. Innerhalb eines Dreiecks einen Punkt zu bestimmen, von dem aus drei, auf die Endpunkte gezogene, Linien die kleinste Summe erzeugen, §. 521.

44. Innerhalb eines Viereckes einen Punkt zu bestimmen, von dem aus vier, auf die Endpunkte gezogene, Linien die kleinste Summe erzeugen, §. 522.

45. Es ist eine begränzte gerade und eine unbegrenzte, die erstere nicht durchschneidende, Linie gegeben. Man soll in letzterer einen Punkt bestimmen, daß zwei, von ihm auf die Endpunkte der erstern, gezogene Linien den größt möglichen Winkel erzeugen, §. 523.

46. Von den Endpunkten einer Linie an einen Punkt in der Peripherie eines Kreises zwei Linien ziehen, daß der dadurch erzeugte Winkel ein Größtes sey, §. 524.

Berichtigungen zur ersten und zweiten Abtheilung.

Seite XI der Vorrede Zeile 13 von unten lese Band st. Bend
— 198 Zeile 12 von oben l. FC st. EC
— 215 — 5 v. u. l. M die Linie MA st. D die Linie DA
— 223 — 14 v. o. l. $\frac{3}{2}$R st. R
— 263 — 1 und 3 v. u. ist überall α st. x zu lesen
— 267 — 9 v. u. l. Ad st. AD
— 292 — 9 v. o. l. ADC st. ADB
— 299 — 9 v. u. l. und BC st. und AC
— 305 — 5 v. o. l. daß der st. daß auf der
— 305 — 6 v. o. l. auf A st. auf B
— 305 — 7 v. o. l. und E st. und C
— 305 — 18 v. o. l. ABG′ st. ABC′
— 312 — 13 v. o. l. die — liegenden st. der — liegende
— 319 — 5 v. u. l. 249 statt 250.
— 338 — 10 v. o. l. ABC, AB′C st. ABC AB′C
— 348 — 12 v. u. l. $\sqrt{\frac{G^2 \cdot h^2}{G^2-D^2} + \frac{G^2}{4}} - \frac{1}{2}D$

statt $\sqrt{\left(\frac{G^2 \cdot h^2}{G^2-D^2} + \frac{G^2}{4}\right)} - \frac{1}{2}D$

— 353 — 11 v. u. l. Auffallspunkte st. Affallspunkte.
— 385 — 8 v. o. l. sondern nur st. sondern ihn nur
— 436 — 10 v. u. l. $\frac{Q^2}{2\sqrt{(Q^2-H^2)}}$ statt $\frac{Q^2}{\sqrt{(Q^2-H^2)}}$
— 438 — 5 v. u. l. P^2 st. P.
— 480 — 14 v. u. l. seine st. ihre
— 518 — 18 v. o. l. $\sqrt{(\frac{1}{2}a^2)} = \frac{a}{\sqrt{2}}$

st. $\frac{1}{2}\sqrt{(a^2)} = \frac{a}{\sqrt{2}}$

— 600 — 14 v. o. l. Auffallspunktes, der st. Auffallspunktes der

Seite 608 Zeile 1 v. u. l. folgende st. folgend
— 610 — 13 v. u. l. mögliche st. möglichste
— 611 — 14 v. o. l. worin die st. worin für die
— 619 — 13 v. o. l. mögliche st. möglichste
— 619 — 13 v. u. l. unzählig oft, st. oft unzählig.
— 623 — 5 v. o. l. zwei Theile st. zwei gleiche Theile.

Nachträgliche Anmerkung zur zweiten Abtheilung.

Anmerkung zu §. 250. Soll ein stumpfwinkliges Dreieck gebildet werden, so bleibt die Auflösung die nämliche, wenn Grundlinie, Höhe und die, dem stumpfen Winkel gegenüberstehende, Seite gegeben ist. Ist aber AC, die dem stumpfen Winkel anliegende Seite, gegeben, so beschreibe man über ihr den Halbkreis ADC, trage die Höhe AD als Sehne ein, und bilde das Dreieck ACD. Nun verlängere man DC und trage auf sie die Grundlinie BC′ = BC; ziehe AB′, so ist AB′C das gesuchte stumpfwinklige Dreieck.

beiden verlängerten Seiten, so wird dieses das fragliche Dreieck seyn, die oben angegebene Construction löst nach diesen Prinzipien die Aufgabe.

Anmerkung. Dieselben Behauptungen und die nämliche Auflösung gilt nicht nur bei dem spitzwinkligen Dreiecke, wie hier gezeigt wurde, sondern auch bei dem stumpfwinkligen. Es wird für die Construction am zweckmäßigsten seyn, die auf der, dem stumpfen Winkel gegenüberliegenden Seite stehende Höhe zum ersten Gliede der Proportion zu wählen.

§. 268.

Aufgabe. Es ist die Summe zweier Seiten und es sind die ihnen zugehörigen Höhen gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden. Fig. 309.

Erste Auflösung. Die Summe der beiden Seiten sey AH, die eine Höhe sey BE, die andere CF. Man trage die beiden Höhen CF = DG und BE = GH in gerader Linie aneinander und bilde aus DH, als Kathete, und AH, als Hypotenuse, das rechtwinklige Dreieck ADH, ziehe durch den Vereinigungspunkt G der beiden Höhen die Linie GC parallel mit DA bis zum Durchschnitte C der Summe der beiden Seiten, schneide von dem Punkte A die Linie CH = AB auf AD ab und verbinde die Punkte B und C durch die Linie BC, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Man ziehe von dem Punkte C auf AB eine senkrechte Linie CF, ebenso von B auf AC die senkrechte BE, so sind diese Linien die den Seiten AB und AC zugehörigen Höhen. Von ihnen ist nun zu beweisen, daß sie den beiden gegebenen Höhen gleich sind.

Daß die Linie FC = DG gleich sey, erhellt sogleich, wenn man berücksichtigt, daß HD und CF auf AD, ebenso, daß FD und CG auf DH senkrecht stehen, und also das Viereck FCGD ein Parallelogramm ist, worin die gegenüberstehenden Seiten einander gleich sind. Es ist also FC = DG der gegebenen Höhe gleich. Daß BE = GH sey, erhellt aus folgendem: Wegen der Parallelen AD und CG ist der Winkel x = x', der Winkel BEA = R und CGH = R,

also der Winkel BEA = CGH, ferner die Linie AB = CH. Hieraus folgt: daß die Dreiecke ABE und CGH congruent sind, daß also BE = GH ist, weil sie den sich gleichen Winkeln x und x' gegenüberstehen.

Endlich ist nach der Construction AB = CH, also

$$AB + AC = CH + AC = AH$$

In dem Dreiecke ABC ist also die Summe zweier Seiten der gegebenen Linie und die ihnen zugehörigen Höhen den gegebenen gleich.

Anmerkung. Man kann sich leicht überzeugen, daß für die gegebenen Bedingungen der Aufgabe zwei Dreiecke ABC AB'C möglich sind. Die Linie CH, die in der Richtung gegen die Kathete DH angelegt wurde, läßt sich auch in entgegengesetzter Richtung auf der Kathete AD antragen, so daß AB' = CH wird und dann das Dreieck AB'C entsteht. Die Dreiecke ABC und AB'C unterscheiden sich von einander dadurch, daß im erstern die fraglichen Seiten einen spitzen Winkel, im zweiten einen stumpfen einschließen; im übrigen aber den Bedingungen der Aufgabe genügen; denn in beiden sind die einschließenden Seiten der gegebenen Summe AH gleich. Die Höhe FC gehört der Seite AB' = AB zu und ist der gegebenen Höhe DG gleich.

Fällt man von B auf die verlängerte Seite AC die Senkrechte B'E', so ist diese Linie, die der Seite AC zugehörige Höhe und der gegebenen zweiten Höhe BE gleich; denn es ist in den Dreiecken E'A'B und ABE der Winkel x = y, als Scheitelwinkel, B'E'A = BEA als rechte Winkel und die Linie AB' = AB, also sind die Dreiecke selbst congruent und die Höhe B'E' = BE, d. h. der gegebenen gleich.

Aus diesen Bemerkungen folgt, daß die Aufgabe selbst unbestimmt ist, indem aus den nämlichen Bedingungen zwei verschiedene Dreiecke gebildet werden können.

Die nämlichen Behauptungen gelten noch immer, wenn auch das zu bildende Dreieck ein stumpfwinkliges Dreieck, wie Fig. 310., werden soll. Die Construction bleibt dieselbe, wie die vorhin angegebene, und es entstehen die beiden stumpfwinkligen Dreiecke ABC und AB'C, wovon jedes den Anforderungen der Aufgabe genügt. Es läßt sich nämlich auf eben dieselbe Art, wie vorhin, zeigen, daß die Dreiecke CGH, ABE und AE'B' congruent und also die Linien GH, BE und B'E' gleich sind.

Die Linie FC ist die der Seite AB zugehörige Höhe, BE aber die der Seite AC zugehörige in dem Dreiecke ABC; ferner ist FC

die der Seite AB′ und EB die der Seite AC zugehörige Höhe; die Linie AB = AB′ und AC = AC′, also sind die beiden Dreiecken zwei Seiten und die ihnen zugehörigen Höhen einander gleich und beide Dreiecke sind stumpfwinklig. Hieraus folgt, daß die Aufgabe auch bei einem stumpfwinkligen Dreiecke unbestimmt ist.

Diese Bemerkungen führen zu dem Schlusse, daß die Aufgabe bestimmt ist, wenn bemerkt ist, wie der von beiden Seiten eingeschlossene Winkel beschaffen seyn soll, ob er spitz oder stumpf seyn soll. Ist er spitz, so wird das Dreieck selbst entweder spitzwinklig, wie Fig. 309. ABC, oder stumpfwinklig, wie ABC′ Fig. 310. seyn. Dem Inhalte nach sind alle diese Dreiecke gleich.

Zweite Auflösung. Fig. 309. Man bilde, wie bei der ersten Auflösung, aus der Summe der Seiten und der Höhen das rechtwinklige Dreieck ADH, errichte in H auf der Linie AH die eine Höhe HK = BE senkrecht und ziehe mit AH die Parallele KB bis zum Durchschnitte B mit AD oder ihrer Verlängerung, verbinde dann die Punkte B und C durch eine gerade Linie BC, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Man ziehe von C und B die Höhen CF und BE, so ist FC = DG, also der gegebenen Höhe, ebenso ist wegen der Parallelen BK und AH die Linie BE = HK, also auch die zweite Höhe BE des Dreiecks ABC der gegebenen Höhe gleich. Wegen der Parallelen CG und AD ist der Winkel x = x′, die Winkel bei D und E sind Rechte und die Linie GH = HK = BE gleich. Hieraus folgt, daß die Dreiecke CGH und ABE congruent und die Linie AB = CH ist. Es ist also auch AB + AC = AC + CH = AH

also die Summe der zwei, den gegebenen Höhen zugehörigen, Seiten der Linie AH gleich.

Anmerkung. Auf gleiche Weise läßt sich auch durch die Parallele B′K′ ein zweites Dreieck AB′C bilden, das den gegebenen Bedingungen entspricht.

Dritte Auflösung. Nennt man die eine Höhe H, die andere h, die Summe der beiden Seiten S, die der Höhe H zugehörige Seite x, so ist die andere S — x.

Berücksichtigt man nun, daß der Flächeninhalt eines Dreiecks durch eine Seite und die ihr zugehörige Höhe bestimmt

wird und immer derselbe bleibt, durch welches Linienpaar er auch dargestellt werden mag; so ist

$$\tfrac{1}{2}(H\,x) = h \,.\, \tfrac{1}{2}(S - x)$$

oder $$Hx + hx = hS$$

und demnach ist die eine Seite $x = \dfrac{h \,.\, S}{H + h}$

die andere $S - x = S - \dfrac{h \,.\, S}{H + h} = \dfrac{HS}{H + h}$

Sucht man nun zur Summe der beiden Höhen, Summe der Seiten, einer Höhe, die vierte geometrische Proportional-Linie, so ist die gefundene Linie die der andern Höhe zugehörige Seite.

Die erste Auflösung ist die kürzeste Construction für diese Formel.

§. 269.

Aufgabe. Es ist der Unterschied zweier Seiten und es sind die diesen zugehörigen Höhen gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden.

Erste Auflösung. Fig. 311. Der gegebene Unterschied sey HC, die Höhen seyen BE und FC. Man nehme den Unterschied GC der beiden Höhen und bilde aus ihm, als Kathete, und dem gegebenen Unterschied der Seite, als Hypotenuse, HC das rechtwinklige Dreieck GHC, verlängere die Kathete GC um die kleinere Höhe BE = FG, errichte an ihrem Endpunkte F eine senkrechte unbestimmte Linie und verlängere auch CH bis zum Durchschnitte A mit ihr, trage von A die Linien AH = AC — HC = AB auf diese Senkrechte und ziehe BC, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Nach der Construction ist AB = AH und AH = AC — HC, also ist in dem Dreieck ABC

$$HC = AC - AH = AC - AB$$

d. h. die Seite AC ist um den gegebenen Unterschied größer, als die Seite AB. Die Linie CF = GC + FG; die Linie GC ist aber der Unterschied der beiden Höhen, also CF — FG. Setzt man diesen Werth statt GC, so ist

$$CF = CF - FG + FG$$

also der gegebenen Höhe gleich. Zugleich steht diese Linie, wegen des rechten Winkels bei F, auf AB senkrecht, ist also die, der Seite AB zugehörige, Höhe in dem Dreiecke ABC und der gegebenen Höhe gleich. Man ziehe endlich die Höhe BE, so ist noch zu zeigen, daß BE der Linie FG gleich sey. Zu dem Ende ziehe man durch H mit FC die Parallele KH, so ist KH = FG; ferner gehört in den Dreiecken AEB und AKH der Winkel bei A zu beiden Dreiecken; die Winkel bei E und K sind Rechte und die Linie AH = AB, also sind die beiden Dreiecke congruent und die Linie BE = KH = FG, also die der Linie AC zugehörige Höhe der zweiten Höhe gleich. Das Dreieck ABC entspricht also den gegebenen Bedingungen.

Anmerkung. Auch hier sind, wie man sich leicht überzeugen kann, zwei Dreiecke möglich, welche beide der Aufgabe genügen. Trägt man nämlich die Linie AH = AB in entgegengesetzter Richtung auf AF und vollendet das Dreieck AB′C und zieht die den Seiten AC und BA zugehörigen Höhen B′E′ und CF, so ist ein Dreieck entstanden, worin der Unterschied zweier Seiten

HC = AC — AH = AC — AB′

dem gegebenen gleich ist, und worin die der einen Seite B′A zugehörige Höhe FC der gegebenen Höhe, und die der andern Seite AC zugehörige Höhe B′E′ der andern gegebenen Höhe BE gleich ist.

Daß die Höhe B′E′ der gegebenen gleich sey, ergibt sich daraus, daß in den Dreiecken AEB und AE′B′ der Winkel x = x′, als Scheitelwinkel, BEA = B′E′A, als Rechte, und AB = AB′ ist, also die Dreiecke congruent sind, daß also auch B′E′ = BE = FG ist.

Die beiden Dreiecke ABC und AB′C unterscheiden sich dadurch von einander, daß der von den Seiten AB und AC eingeschlossene Winkel spitz, der von B′A und AC eingeschlossene aber stumpf ist.

Die Aufgabe ist daher unbestimmt und diese Unbestimmtheit dehnt sich auch auf stumpfwinklige Dreiecke, wie Fig. 312. an den Dreiecken ABC und AB′C erhellt, aus. Sie wird bestimmt, wenn angegeben ist, wie der von beiden Seiten eingeschlossene Winkel beschaffen seyn soll, ob er spitz oder stumpf seyn soll.

Soll er spitz seyn, so kann das hiedurch zu erzeugende Dreieck entweder ein spitzwinkliges oder selbst ein stumpfwinkliges werden. Dem Inhalte nach sind alle diese Dreiecke gleich.

Zweite Auflösung. Fig. 311. Man bilde aus den nämlichen Elementen, wie vorhin, das rechtwinklige Dreieck ACF, errichte in dem Endpunkte C der Hypotenuse AC, die Linie CM = BE senkrecht, ziehe durch den Punkt M mit AC

die Parallele MB bis zum Durchschnitte B mit der Senkrechten AB und ziehe BC, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Die Linie CF ist wegen des rechten Winkels bei F, die der Seite AB zugehörige Höhe und der gegebenen Höhe gleich. Zieht man nun von B aus auf AC die Linie BE senkrecht, so ist BE die der Linie AC zugehörige Höhe, und wegen der Parallelen BM und AC, der Linie CM = BE, also der gegebenen zweiten Höhe gleich Nun ist noch zu zeigen, daß AC um HC größer sey, als AB. Dieß geschieht dadurch, daß HK mit FC parallel gezogen wird, denn alsdann ist KH = FG = BE; die Linien KH und EB gehören zu den Dreiecken AEB und AKH, worin der Winkel x beiden zugehört und jeder von den Winkeln bei E und K einem Rechten gleich ist. Hieraus folgt die Congruenz der Dreiecke ABE und AKH, also auch die Gleichheit der Linien AB und AH, und es ist also HC = AC — AH = AC — AB. Auch hier lassen sich zwei Dreiecke ABC und AB'C bilden.

Dritte Auflösung. Nennt man die der größeren Seite zugehörige Höhe H, die der kleinern h, den Unterschied D, die kleinere Seite x, die größere also x + D, so hat man folgende Proportion, da die Höhen zu einander im umgekehrten Verhältnisse ihrer Seiten stehen,

$$H : h = x : x + D$$

und hieraus $x \,.\, h = Hx + HD$

Es ist also die kleinere Seite

$$x = \frac{H \,.\, D}{h - H}$$

die größere $x + D = D + \dfrac{H \,.\, D}{h - H} = \dfrac{hD}{h - H}$

Die oben angegebene Auflösung ist die kürzeste Construction dieser Formel.

§. 270.

Aufgabe. Es sind zwei Seiten eines Dreiecks und die Summe der ihnen zugehörigen Höhen gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden. Fig. 313.

Auflösung. Die Seiten seyen BC und AB, die Summe

der ihnen zugehörigen Höhen CE. Man lege die beiden Seiten BC und BA = BG in gerader Linie aneinander und bilde aus ihrer Summe, als Hypotenuse und der Linie CE als Kathete, ein rechtwinkliges Dreieck GEC und ziehe durch B die Linie BA mit der Kathete GE parallel, mache BA = BG und ziehe AC, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Die Linie AB = GB ist der einen und BC der andern gegebenen Seite gleich, also hat das Dreieck ABC die zwei gegebenen Seiten. Die Linie BA ist parallel mit GE gezogen; EC steht auf GE senkrecht auf, also steht sie auch auf der ihr parallelen AB senkrecht auf, und es ist also FC die der Seite AB zugehörige Höhe. Nun ist noch zu erweisen, daß EF der Linie AD gleich sey. Dieß zeigt sich, wenn man von F die Linie FK parallel mit GB zieht. Dann ist GB = KF = AB, der Winkel $x = x'$ wegen der Parallelen AB und GE; der Winkel $x' = x''$ wegen der Parallelen GB und KF, also ist auch $x = x''$, der Winkel $r = r' = R$. In dem Dreieck ABD und EKF ist eine Linie und alle Winkel einander gleich. Also sind die Dreiecke selbst congruent und die Linie AD = EF. Es ist also auch

$$AD + FC = EF + FC = EC$$

Das Dreieck ABC entspricht also den Forderungen der Aufgabe.

Anmerkung. Die vorgelegte Aufgabe läßt zwei Dreiecke ABC und A'BC zu, die beide den aufgestellten Anforderungen genügen. Denn die Linie GB läßt sich auch auf die entgegengesetzte Richtung der parallelen Linie AB tragen, so daß BA' = GB wird und dann das Dreieck A'BC entsteht, welches ein stumpfwinkliges ist und sich von dem Dreieck ABC dadurch unterscheidet, daß jenes ein spitzwinkliges ist.

Der Beweis, daß auch das Dreieck A'BC den Bedingungen der Aufgabe genügt, führt sich nach Fig. 313., wenn man die Linie AD' senkrecht auf die verlängerte BC zieht, es ist dann der Winkel $y = x = x''$, KF = GB = BA', der Winkel $r' = r'' = R$, also die Dreiecke A'D'B und EKF congruent und also die Linie EF = A'D'.

Die Linie FC ist die der Seite A'B und die Linie A'D die der Seite BC zugehörige Höhe und beide zusammen sind der Linie EC gleich. Die Linie A'B = AB und BC = BC, also erfüllt auch das Dreieck A'BC die Bedingungen der Aufgabe.

Auch diese Aufgabe zeigt, wie die vorige, die nämliche Unbestimmtheit bei einem stumpfwinkligen Dreiecke Fig. 314.

Verfährt man nämlich auch in diesem Falle, wie bei der oben angegebenen Auflösung, und bildet man aus der Summe der beiden Seiten AG, als Hypotenuse, und der Summe der beiden Höhen AF, als Kathete, das rechtwinklige Dreieck AFG und zieht durch den Vereinigungspunkt C der beiden Seiten mit FG die Parallele DC, schneidet von C aus die Linie CG = CB = CB′ ab und bildet die Dreiecke ABC und AB′C, so genügen beide Dreiecke den Forderungen der Aufgabe, denn es ist BC = CG und CB′ = CG und die Seite AC kommt in beiden Dreiecken vor; also hat jedes Dreieck die beiden Seiten.

Um zu beweisen, daß die Summe der beiden Höhen AD und BE und AD, B′E′ in beiden Dreiecken der gegebenen Höhensumme AF gleich sey, diene folgendes: Man ziehe CH senkrecht auf FG, BE senkrecht auf AC, so ist, wegen der Parallelen DC und FG, x = x′ der Winkel bei E und H Rechte, die Linie CG = BC, also sind die Dreiecke BEC und CHG congruent und die Linie BE = CH, die Linie CH ist auch der Linie DF gleich, also AD + BE = AF, und demnach entsprechen die beiden Höhen AD und BE in dem Dreiecke ABC den Bedingungen der Aufgabe.

Ebenso zeigt es sich, daß AD + B′E′ = AF sey, denn es ist der Winkel x = x′, die Winkel bei E und E′ Rechte, die Linie CB = CB′, also die Dreiecke BEC und CB′E′ congruent, und B′E′ = BE, also auch

AD + B′E′ = AD + BE = AF

Aus diesen Bemerkungen folgt, daß die Aufgabe bestimmt ist, wenn bemerkt wird, wie der von beiden Seiten eingeschlossene Winkel beschaffen seyn, ob er spitz oder stumpf seyn soll. Ist er stumpf, so muß natürlich das gesuchte Dreieck stumpfwinklig seyn, ist er spitz, so kann es entweder ein spitzwinkliges, wie Fig. 313. ABC, oder selbst wieder ein stumpfwinkliges, wie Fig. 314. ACB′, seyn.

Die Aufgabe ist ferner bestimmt, wenn bemerkt ist, daß bei einem stumpfwinkligen Dreiecke die eine Höhe durch die Spitze des stumpfen Winkels gehen soll, oder wenn keine durch seine Spitze gehen soll. Dem Inhalte nach sind diese Dreiecke gleich.

§. 271.

Aufgabe. Es ist die eine Seite und die ihr zugehörige Höhe, und die Summe der beiden übrigen Seiten gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden.

1) Auflösung für ein spitzwinkliges Dreieck.

Analysis. Es sey die eine Seite G, die ihr zugehörige Höhe H, die Summe der beiden übrigen Seiten S. Nennt man die eine von ihnen x, so ist die andere S — x; den einen Abschnitt y, der durch die Höhe H auf G erzeugt wird, so ist der andere G — y. Da jedes Dreieck und die von einer Spitze auf die gegenüberstehende Linie gefällte Höhe in zwei rechtwinklige Dreiecke getheilt wird, so hat man zwischen den Seiten, Abschnitten und der Höhe

$$1)\quad x^2 = h^2 + y^2$$

und

$$2)\quad (S - x)^2 = h^2 + (G - y)^2$$

Aus der ersten Gleichung hat man

$$y = \sqrt{(x^2 - h^2)}$$

Setzt man diesen Werth für y in die zweite Gleichung, so wird

$$(S - x)^2 = h^2 + [G - \sqrt{(x^2 - h^2)}]^2$$

Wird diese Gleichung entwickelt, so entsteht

$$\frac{S^2 - 2Sx - G^2}{2G} = -\sqrt{(x^2 - h^2)}$$

Wird diese Gleichung in die zweite Potenz erhoben und nach x geordnet, so führt sie zu folgender

$$x^2 - \frac{4(S^2 - G^2)S}{4(S^2 - G^2)}x = \frac{-(S^2 - G^2)^2 - 4G^2h^2}{4(S^2 - G^2)}$$

$$\text{oder}\quad x^2 - Sx = -\frac{(S^2 - G^2)^2 - 4G^2h}{4(S^2 - G^2)} =$$

$$= \frac{-S^2 + G^2}{4} - \frac{4G^2h^2}{4(S^2 - G^2)}$$

Wird auf beiden Seiten $\frac{1}{4}S^2$ zugezählt, so entsteht

$$x = \tfrac{1}{2}S \pm \sqrt{\left(\frac{G^2}{4} - \frac{4G^2 . h^2}{4(S^2 - G^2)}\right)}$$

$$= \tfrac{1}{2}S \pm \sqrt{\frac{G^2 . S^2 - G^4 - 4G^2h^2}{4(S^2 - G^2}}$$

$$= \tfrac{1}{2}S \pm \sqrt{\frac{G^2}{4} - \frac{G^2 . h^2}{S^2 - G^2}}$$

Da vor dem Wurzelzeichen das positive und negative Zeichen stehen kann, so ist zu berücksichtigen, daß das positive für die größere und das negative für die kleinere Seite gilt, für die größere Seite erhält man daher folgende Gleichung

$$\tfrac{1}{2}S + \sqrt{\frac{G^2}{4} - \frac{G^2 \cdot h^2}{S^2 - G^2}}$$

für die kleinere Seite aber folgende

$$\tfrac{1}{2}S - \sqrt{\frac{G^2}{4} - \frac{G^2 \cdot h^2}{S^2 - G^2}}$$

2) Auflösung für ein stumpfwinkliges Dreieck, wenn eine der zwei Seiten, welche den stumpfen Winkel einschliessen, und die ihr zugehörige Höhe gegeben ist.

Analysis. Nennt man unter den nämlichen Bestimmungen, wie vorhin, die Verlängerung der Grundlinie bis zum Auffallspunkte der Höhe y, die zweite an dem stumpfen Winkel liegende Seite x, so ist die dem stumpfen Winkel gegenüberliegende S — x und hieraus hat man, wegen der zwei hierdurch entstandenen rechtwinkligen Dreiecke, folgende zwei Gleichungen:

1) $x = h^2 + y^2$

2) $(S - x)^2 = (G + y)^2 + h^2$

Wird aus der ersten $y = \sqrt{x^2 - h^2}$ in die zweite eingeführt, so entsteht $(S - x)^2 = (G + \sqrt{x^2 - h^2})^2 + h^2$

Die Entwicklung dieser Gleichung führt zu den nämlichen Formeln, wie oben.

Construction. Fig. 315. Es sey S = AB, G = BC, H = AE. Man bilde aus der Grundlinie BC, als Kathete, und der Summe AB, als Hypotenuse, das rechtwinklige Dreieck ABC, verlängere die gefundene Kathete AC, um die Grundlinie BC = CD, trage von A aus auf die Hypotenuse die Höhe AE an, ziehe durch ihren Endpunkt nach der Spitze C die Linie CE und durch D mit EC eine Parallele DF, bilde aus der halben Grundlinie ½BC = EG, als Hypotenuse, und aus EF, als Kathete, das Dreieck EGF, halbire die Summe AB = AH und vergrößere AH um die Linie GF so, daß die Linie AH + GF = AK wird, so ist sie die größere und KB die kleinere Seite, aus ihnen und der dritten Seite oder der Höhe läßt sich leicht das gesuchte Dreieck AKP bilden, worin MK der gegebenen Höhe AH gleich seyn wird.

Anmerkung. Die Aufgabe ist so lange möglich, als der unter dem Wurzelzeichen begriffene Ausdruck eine positive Größe ist; also so lange

$$\frac{1}{4} G^2 > \frac{H^2 \,.\, G^2}{S^2 - G^2} \text{ ist}$$

Sie ist unmöglich, wenn

$$\frac{1}{4} G^2 < \frac{h^2 \,.\, G^2}{S^2 - G^2}$$

ist. Wird die Größe unter dem Wurzelzeichen o, so wird

$$\frac{1}{4} G^2 = \frac{h^2 \,.\, G^2}{S^2 - G^2}$$

oder $$S^2 - G^2 = 4 H^2$$

oder $$S^2 = 4 H^2 + G^2$$

und dieß ist der Fall bei einem gleichschenkligen Dreiecke, denn alsdann ist die eine Seite

$$x = \frac{1}{2} S + o = \frac{1}{2} S$$

und die andere $$S - x = S - \frac{1}{2} S = \frac{1}{2} S$$

d. h. die beiden Seiten sind einander gleich.

§. 272.

Aufgabe. Es ist die eine Seite, die ihr zugehörige Höhe und der Unterschied der beiden andern Seiten gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden.

1) Auflösung für ein spitzwinkliges Dreieck. Fig. 316.

Analysis. Die eine Seite sey G, die ihr zugehörige Höhe H, der Unterschied der beiden übrigen Seiten D. Nennt man die kleinere Seite x und den ihr zugehörigen Abschnitt y, so ist die größere Seite x + D und der ihr zugehörige Abschnitt G — y. Hieraus ergeben sich nach dem pythagoräischen Lehrsatze folgende Gleichungen

1) $x^2 = h^2 + y^2$

2) $(x + D)^2 = h^2 + (G - y)^2$

Aus der ersten Gleichung erhält man für den kleinern Abschnitt

$$y = \sqrt{x^2 - h^2}$$

Wird dieser Werth in die zweite eingeführt, so entsteht

$$(x + D)^2 = h^2 + (G - \sqrt{x^2 - h^2})^2$$

Die Entwickelung dieser Gleichung führt zu folgender

$$2Dx + D^2 - G^2 = -2G\sqrt{x^2 - h^2}$$

Wird diese Gleichung ins Quadrat erhoben, so entsteht

$$\frac{4G^2h^2 + (D^2 - G^2)^2}{4(G^2 - D^2)} = x^2 + Dx$$

Wird $\frac{1}{4}D^2$ auf beiden Seiten zugezählt und bemerkt, daß

$$D^2 - G^2 = (D - G)(D + G)$$
$$= -(G - D)(G + D)$$

ist, so gehet obige Gleichung in folgende über

$$\frac{4G^2h^2 + (G + D)^2(G^2 - D)^2}{4(G^2 - D^2} + \frac{1}{4}D^2 = (x + \frac{1}{2}D)^2$$

und hieraus die Formel für die kleinere Seite

$$3)\quad x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4G^2h^2 + (G + D)^2(G - D)^2}{G^2 - D^2} + D^2} - \frac{1}{2}D$$

und die größere

$$4)\quad x + D = \frac{1}{2}D + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4G^2.h^2 + (G + D)^2(G - D)^2}{G^2 - D^2} + D^2}$$

bei anderer Darstellung, wornach $(D^2 - G^2)^2 = (G^2 - D^2)^2$ ist, ist die kleinere

$$5)\quad x = \sqrt{\frac{G^2.h^2}{G^2 - D^2} + \frac{G^2 - D^2}{4} + \frac{D^2}{4}} - \frac{1}{2}D$$

$$= \sqrt{\left(\frac{G^2.h^2}{G^2 - D^2} + \frac{G^2}{4}\right)} - \frac{1}{2}D$$

und die größere

$$6)\quad x + D = \frac{1}{2}D + \sqrt{\frac{G^2}{4} + \frac{G^2.h^2}{G^2 - D^2}}$$

2) Auflösung für ein stumpfwinkliges Dreieck.

Nennt man unter den nämlichen Bezeichnungen, wie oben, die kleinere, dem stumpfen Winkel anliegende, Seite x, den Abschnitt zwischen der Grundlinie und Höhe y, so ist die Grundlinie bis zum Auffallspunkte der Höhe G + y, die größere Seite x + D und hieraus ergeben sich nach dem pythagoräischen Lehrsatze folgende Gleichungen für diese Linie

$$1)\quad x^2 = h^2 + y^2$$
$$2)\quad (x + D)^2 = h^2 + (G + y)^2$$

Wird der Werth für y aus der ersten entwickelt

$$y = \sqrt{x^2 - h^2}$$

und in die zweite eingeführt, so entsteht

$$(x + D)^2 = h^2 + [G + \sqrt{(x^2 - h^2)}]^2$$

Die Entwickelung dieser Gleichung führt zu den nämlichen Resultaten, wie oben

Construction der Formeln 5 und 6. Fig. 316. Es sey die Grundlinie G = BC, der Unterschied CD, die Höhe H = DE. Man beschreibe über der Grundlinie BC einen Halbkreis BPDC, trage an dem einem Endpunkte C den Unterschied CD, als Sehne ein, und ziehe durch die Punkte B und D die unbestimmte Linie BD, verlängere sie um die Höhe DE, ziehe dann durch den Endpunkt E die Linie EF parallel mit DC bis zum Durchschnitte F der verlängerten Grundlinie BC. Nun errichte man an dem einen Endpunkte B der Grundlinie die gefundene Linie CF = BG senkrecht, ziehe von ihrem Endpunkte G bis zum Mittelpunkte M der Linie BC die Linie GM, verlängere sie um den halben Unterschied, so ist die hiedurch entstandene Linie HG die größere Seite, verkürze sie um denselben, so ist die hiedurch entstandene MK die kleinere Seite; aus der Grundlinie BC und den beiden um DC verschiedenen Seiten MK = AB und MH = AC, läßt sich leicht das gesuchte Dreieck ABC bilden.

Anmerkung. Die Gleichung

$$x = \sqrt{\frac{G^2}{4} + \frac{G^2 \cdot h^2}{G^2 - D^2}} \pm \tfrac{1}{2}D$$

also auch die Aufgabe ist möglich, so lange der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen einen positiven Werth erzeugt, was so lange geschieht, als $G^2 - D^2$ einen positiven Werth hat. Wird dieser negativ, d. h. wird der Unterschied zweier Seiten größer als die dritte, so wäre die Aufgabe unmöglich, was bekanntlich bei den drei Seiten eines Dreiecks nicht möglich ist. Würde der Unterschied der gegebenen dritten Seite gleich, so entstünde

$$x = \sqrt{\frac{G^2}{4} + \frac{G^2 \cdot h^2}{0}} \pm \tfrac{1}{2}D$$

$$= \sqrt{(\infty + \tfrac{1}{4}G^2} \pm \tfrac{1}{2}D$$

was gleichfalls unmöglich ist. Hiesaus folgt: der Unterschied zweier Seiten kann nie der dritten Seite gleich seyn.

§. 273.

Aufgabe. Es sind drei Punkte, die nicht in gerader Richtung liegen, gegeben. Man soll ein Dreieck bilden, worin die gegebenen Punkte die Auffallspunkte für seine Höhen bilden.

Auflösung. Fig. 317. Die Punkte seyen D, E, F. Man verbinde die gegebenen Punkte durch die geraden Linien FE, ED und FD, wodurch das Dreieck DEF entsteht, halbire die hiedurch entstandenen Winkel EFD, FDE und DEF durch die Linien FC, DA und EB und errichte auf diesen Halbirungslinien in den Punkten D, E und F die Linien BC, AC und AB senkrecht und verlängere sie bis zu ihren Durchschnitten in A, B und C, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Der Beweis beruht darauf, daß die in den Punkten D, E, F auf den Linien BC, AC, AB senkrecht stehenden Linien DA, EB, FC, hinlänglich verlängert, durch die Vereinigungspunkte der Seiten A, B, C gehen. Der Beweis wird sofort alsdann gegeben seyn, wenn gezeigt ist, das die Seiten sich zu einander umgekehrt, wie die ihnen zugehörigen Höhen verhalten, weil dieß nur unter obengenannter Bedingung möglich ist.

Dieß erhellt aus folgendem:

In den beiden Dreiecken AFM und MDC sind bei F und D rechte Winkel und die Winkel x′ und x″ als Wechselwinkel einander gleich, also auch die dritten Winkel n und n′ einander gleich und demnach die Dreiecke AFM einander ähnlich, und es verhält sich also

$$1)\quad AM : AF = MC : DC$$

ferner sind die Dreiecke AFM und ABD einander ähnlich, denn es sind in beiden bei F und D rechte Winkel und der Winkel n beiden gemeinschaftlich, also auch der dritte Winkel x und x′ einander gleich. Hieraus folgt die Proportion

$$2)\quad AM : AF = AB : AD$$

Die Vereinigung der Proportionen 1 und 2 führt zu folgender

$$3)\quad AB : AD = MC : DC$$

Die Dreiecke MDC und FBC sind gleichfalls einander ähnlich, denn es sind bei D und F rechte Winkel, der Winkel n′ beiden gemeinschaftlich, also auch der dritte Winkel x′ und x″ einander gleich. Hieraus fließt die Proportion

$$4)\quad MC : DC = BC : FC$$

Die Vereinigung der Proportionen 3 und 4 führt zu folgender

$$AB : AD = BC : FC$$

oder wenn man die mittleren Glieder versetzt

$$AB : BC = AD : FC$$

Diese Schlüsse lassen sich auf die Dreiecke ADC und BEC, AEB und AFC anwenden, und diese führen zu der Behauptung, daß in dem auf obige Art construirten Dreiecke jedes Seitenpaar sich zu einander verhält umgekehrt, wie die ihnen zugehörigen Höhen, und daß also das Dreieck den Bedingungen der Aufgabe entspricht.

Ein anderer Beweis führt sich leicht durch folgende Betrachtung. Fig. 318. Werden in einem Dreiecke die drei Auffallspunkte der Höhen D, E, F durch gerade Linien FE, FD, DE, so wird das Dreieck ABC durch jene Verbindungslinie in zwei umgekehrt ähnliche Dreiecke getheilt, und es ist

$$AFE \backsim ACB, \quad BFD \backsim BCA, \quad CDE \backsim CAB$$

Hieraus folgt, daß in den Dreiecken AFE und ABC die Winkel y und y′, x und x′, einander gleich sind, ebenso daß in den Dreiecken BFD und BAC, die Winkel z und z′ und v und x einander gleich sind. Da nun

$$x = x' \text{ und } v = x$$

ist, so ist auch der Winkel $v = x'$. Da die Linie FC auf AB senkrecht aufsteht, also zwei rechte Winkel bildet, so ist der Winkel $\quad x' + n = R$ und $v + m = R$

also auch $\quad v + m = x' + n$

oder, da $v = x'$ ist, $\quad m = n$

Demnach theilt also die Höhe FC den Winkel EFD in zwei gleiche Theile. Was hier von den Winkeln m und n bewiesen wurde, das läßt sich von den Winkeln bei E und D auf gleiche Art beweisen. Hieraus fließt folgender Satz:

Wenn in einem Dreiecke die Auffallspunkte der drei Höhen durch gerade Linien verbunden werden, so entsteht ein Dreieck, dessen Winkel durch die Höhen des äussern Dreiecks halbirt werden.

Wendet man diesen Lehrsatz auf obige Aufgabe an, so fließt hieraus die oben angegebene Auflösung.

Anmerkung. Die Aufgabe ist in der Form, worin sie hier aufgestellt ist, unbestimmt, denn sie läßt vier Dreiecke zu, die sämmtlich den Bedingungen der Aufgabe genügen. Diese sind Fig. 317.

1) das spitzwinklige Dreieck ABC,
2) das stumpfwinklige Dreieck BMC,
3) das stumpfwinklige Dreieck BMA,
4) das stumpfwinklige Dreieck CMA.

In dem spitzwinkligen Dreiecke ABC gehören die Höhen AD, BE und FC den Seiten BC, AC, AB zu; in dem stumpfwinkligen Dreiecke BMC gehört der Seite BC die Höhe MD, der Seite BM die Höhe CE und der Seite MC die Höhe FB zu; in dem Dreiecke BAM gehört den Seiten BA, AM und BM die Höhen FM, BD und AE, und in AMC gehören den Seiten AC, MC, AM die Höhen ME, FA und DC zu. In allen Dreiecken fallen also die drei Höhen in den gegebenen Punkten auf. Das spitzwinklige Dreieck ABC unterscheidet sich von den stumpfwinkligen dadurch, daß bei ihm drei Seiten durch die gegebenen Punkte gehen, bei jenen aber nur eine Seite durch einen Punkt geht. Soll die Aufgabe bestimmt seyn, so muß bemerkt seyn, ob ein spitzwinkliges, oder ein stumpfwinkliges Dreieck gebildet werden soll, und in letztem Fall durch welchen Punkt, die dem stumpfen Winkel gegenüber liegende Seite gehen soll.

Ferner ist zu berücksichtigen, daß in jedem stumpfwinkligen Dreiecke der stumpfe Winkel der Ergänzungswinkel zu 2 Rechten, zu dem ihm gegenüber stehenden spitzen Winkel ist, und daß also der Winkel

$$BMC = 2R - BAC,$$
$$CMA = 2R - ABC,$$
$$BMA = 2R - BCA.$$

§. 274.

Aufgabe. Es sind zwei Punkte und zwei Linien gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden, worin die eine Linie durch einen von den gegebe-

nen Punkten gehe, und die dritte Linie durch den zweiten Punkt, die beiden Punkte aber die Auffallspunkte für die ihren Seiten zugehörigen Höhen bilden. Fig. 319 und 320.

Auflösung. Die gegebenen Linien seyen AB und AC, die Punkte D und E, die Seite AC soll durch den Punkt E gehen. Man verbinde die gegebenen Punkte D und E durch die gerade Linie ED und suche Fig. 319. zu den gegebenen Linien AB, AC, DE = AF die vierte geometrische Proportionale AG, beschreibe über der Linie AC einen Halbkreis und trage von ihrem einen Endpunkte A der Linie AG = AH als eine unbestimmte Sekante AHB′ durch die Punkte A, H, beschreibe von dem andern C mit der Linie AB einen Kreisbogen, der die Sekante in einem Punkte B′ durchschneiden wird, ziehe von B′ aus auf AC die Linie B′M senkrecht und nun beschreibe man (Fig. 320.) auf der Linie DE von dem Punkte D aus mit HB′ = BD, von E mit B′M = BE das Dreieck BDE, errichte in D eine senkrechte Linie, vollende von B aus mit der Linie BA, als Hypotenuse, das Dreieck ABD, verlängere BD um DC = AG und ziehe durch A und C die Linie AC, so wird sie durch den gegebenen Punkt E gehen.

Beweis. Dieser führt sich am besten aus folgender Betrachtung: In dem Dreieck ABC (Fig. 320) sey gegeben die Seite AB und BC und die Affallspunkte D und E der beiden Höhen AD und BE, was der vorgelegte Fall ist. Verbindet man die beiden Punkte durch die gerade Linie DE, so wird nach den Bemerkungen zum vorigen § das Dreieck ABC in zwei umgekehrt ähnliche Dreiecke BAC und EDC zerlegt. Hieraus fließt folgende Proportion

$$AB : AC = DE : DC$$

Durch obige Prämissen ist also auch die Linie DC gegeben. Ist diese gefunden, so läßt sich auch durch sie als Kathete und aus AC als Hypotenuse das rechtwinklige Dreieck ADC finden, und es ist auch die Höhe AD gegeben; aus AD und AB läßt

sich auch BD bestimmen. Ist der Punkt B gefunden, so ist auch seine Entfernung von E oder die Linie BE gefunden, da sie von B aus in dem Punkte E senkrecht auf AC steht; hat man nun diese zwei Linien gefunden, so kann man mit ihnen über den gegebenen Punkten D und E das Dreieck BDE bilden und dann sofort leicht das Dreieck ABC darstellen.

Die gegebene Construction (Fig. 319 und 320.) wurde nach diesen Grundsätzen ausgeführt.

§. 275.

Aufgabe. Es ist ein Winkel, die Höhe, die durch seine Spitze geht, und das Verhältniß der beiden, den Winkel einschließenden, Seiten gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden. Fig. 321.

Auflösung. Die Höhe sey AD, der Winkel x, das Verhältniß der beiden Seiten zu einander werde angedeutet durch die Linien Ab und Ac. Man trage auf die Schenkel des gegebenen Winkels die beiden Linien Ab und Ac, verbinde die beiden Endpunkte b und c durch die gerade Linie bc, fälle von der Spitze A auf die Linie bc, oder ihre Verlängerung, eine Linie Ad senkrecht und trage auf sie die gegebene Höhe AD an, lege durch den Endpunkt D mit bc eine Linie parallel bis zu den Durchschnitten mit den beiden Schenkeln in B und C, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

§. 276.

Aufgabe. Es ist ein Winkel, eine anliegende Seite und das Verhältniß gegeben, worin die dem Winkel gegenüberstehende Seite zu der ihr zugehörigen Höhe steht. Man soll daraus ein Dreieck bilden. Fig. 322.

Auflösung. Der Winkel sey x, die anliegende Seite AC,

das Verhältniß der gegenüber liegenden Seite und der ihr zugehörigen Höhe sey durch die Linien bc und ad ausgedrückt. Man beschreibe über der Linie bc einen Kreisbogen, welcher den gegebenen Winkel faßt, errichte in ihrem Endpunkte die Linie bd = bg senkrecht und ziehe durch ihren Endpunkt g die Linie gA parallel mit bc bis zum Durchschnitte A der Peripherie, ziehe von diesem Punkte A durch die Endpunkte der Sehne bc unbestimmte Linien, trage auf die eine die gegebene Seite AC und ziehe durch den Endpunkt C eine Linie CB parallel bis zum Durchschnitte B mit der Linie bc, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Der Winkel BAC ist nach der Construction dem gegebenen gleich und steht der bc gegenüber, die Linie Ad ist der gegebenen Höhe gleich, also stehen in dem Dreiecke Abc die Linien bc und Ad in dem gegebenen Verhältnisse, die Linie BC gehet mit bc parallel, also sind die beiden Dreiecke Abc und ABC und auch die Dreiecke Abd und ABD, Adc und ADC einander ähnlich, und es ist

$$Ac : AC = Ad : AD$$

ebenso

$$Ac : AC = bc : BC$$

die Vereinigung beider führt zu folgender

$$Ad : AD = bc : BC$$

Die Linie AD steht senkrecht auf bc, also auch senkrecht auf der mit ihr parallel laufenden BC, ist also die Höhe des Dreiecks ABC. Demnach entspricht das Dreieck ABC den in der Aufgabe aufgestellten Bedingungen.

Anmerkung. Man sieht leicht, daß die Aufgabe in der gegebenen Form unbestimmt ist, denn es wird ein anderes Dreieck entstehen, wenn die Linie AC auf den andern Schenkel getragen wird. Sie wird bestimmt seyn, wenn angegeben ist, ob die gegebene Linie die größere oder kleinere von den beiden, den Winkel x umschließenden, Seiten seyn soll.

§. 277.

Aufgabe. Es ist eine Seite, die der zweiten Seite zugehörige Höhe und das Verhältniß, worin die zweite Seite zur dritten steht, gegeben. Man soll daraus das Dreieck bilden. Fig. 324.

Auflösung. Die Seite sey AB, die der zweiten Seite zugehörige Höhe sey AD, das Verhältniß der zweiten zur dritten Seite sey durch die Linien Bc und ac angedeutet. Man beschreibe über AB einen Halbkreis, trage von dem einen Endpunkte A der Linie AB die Höhe AD als Sehne, lege durch den andern Endpunkt und durch D eine unbestimmte Linie, trage auf sie die Linie Bc und von c aus die Linie ac so, daß ac zwischen die Linien BD und AB falle, ziehe von A die Linie AC parallel mit ac bis zum Durchschnitte mit DC in C, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Der Beweis führt sich leicht.

C

Aufgaben über das Dreieck, wenn unter den gegebenen Elementen, Seiten, Winkel, Höhe und Abschnitte der Grundlinie vorkommen.

§. 278.

Wenn man von irgend einer Winkelspitze A eines spitzwinkligen Dreiecks (Fig. 325.) auf die gegenüberstehende Seite eine senkrechte Linie AD fällt, so fallt diese immer zwischen den beiden Endpunkten der Linie BC auf und theilt die gegenüberstehende Linie in zwei Theile BD und DC. Die senkrechte Linie bildet, wie schon oben bemerkt wurde, die Höhe des Dreiecks; die Linie BC die Grundlinie und die Theile BD und DC, die durch den Auffallspunkt der Höhe auf der Grundlinie erzeugt werden, bilden die Abschnitte der Grund-Linie.

Diese Abschnitte werden immer entstehen, auf welche Seite auch die Höhe gefällt wird, wenn die drei Winkel eines Dreiecks spitz sind; sie werden auch dann noch entstehen, wenn in einem stumpfwinkligen Dreiecke (Fig. 326.) von der Spitze A des stumpfen Winkels auf die gegenüberstehende Seite eine senkrechte Linie gezogen wird. Nur dann, wann von der Spitze A eines spitzen Winkels in einem stumpfwinkligen Dreieck (Fig. 327.) auf die gegenüberstehende Seite BC eine senkrechte Linie gezogen werden soll, fällt diese bekanntlich nicht auf jene selbst auf, sondern auf ihre Verlängerung CD. In diesem Falle entstehen auch zwei Theile BC und CD, wovon die Grundlinie BC selbst einen Theil bildet.

Vergleicht man nun (Fig. 325. und 326.) die Abschnitte BD und DC mit den Seiten AB und BC, so gehört der größern Seite der größere Abschnitt, der kleinern Seite der kleinere Abschnitt und umgekehrt zu; die Abschnitte der Grundlinie BC sind die Entfernungen des Auffallspunkts der Höhe AD von ihren beiden Endpunkten.

Trägt man diese Bemerkungen auf das stumpfwinklige Dreieck ABC (Fig. 327) über, so steht in ihm, sobald die Höhe AD mit in Betrachtung kommt, der Seite AB, nicht BC, sondern BD und der Seite AC, die Linie CD gegenüber, und es entstehen dann auch zwei Abschnitte BD und CD, welche, wie vorhin, die Entfernungen des Auffallspunktes der Höhe AD von den beiden Endpunkten B und C der Grundlinie BC bilden. Die beiden Abschnitte eines stumpfwinkligen Dreiecks ABC unterscheiden sich aber von denen eines spitzwinkligen dadurch, daß ihre Differenz BD — CD die Grundlinie BC ist, während die Grundlinie eines spitzwinkligen Dreiecks durch die Summe BD + CD der beiden Abschnitte gebildet wird, daher wird auch bei einem stumpfwinkligen Dreiecke der eine Abschnitt negativ genannt.

Um übrigens im Folgenden Mißverständnisse zu verhüten, so werden, wenn von stumpfwinkligen Dreiecken die Rede seyn wird, die Benennungen: Grundlinie und ihre Verlängerung statt Abschnitte gebraucht werden. Hieraus lassen sich die beiden Abschnitte leicht finden.

Aus diesen Bemerkungen erhellt, daß wenn in folgendem Abschnitte zwischen spitzwinkligen und stumpfwinkligen unterschieden wird, unter spitzwinkligen solche zu verstehen sind, die an der Grundlinie zwei spitze Winkel liegen haben, wenn schon in diesem Falle der dritte ein stumpfer, wie Fig. 326., seyn kann, unter stumpfwinkligen aber solche, die an der Grundlinie den stumpfen Winkel liegen haben.

§. 279.

Aufgabe. Es sind die beiden Abschnitte der Grundlinie und eine anliegende Seite gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden.

1) Die beiden Abschnitte der Grundlinie seyen BD und DC, die Seite sey AC und die Winkel an der Grundlinie seyen spitz. Fig. 325. und 326.

Auflösung. Man trage die beiden Abschnitte in gerader Linie BDC aneinander, errichte in ihrem Vereinigungspunkt D

eine unbestimmte senkrechte Linie und trage von einem der gegebenen Endpunkte C der Grundlinie BC die gegebene Seite CA an, daß ihr Endpunkt in die Senkrechte A falle und verbinde den Punkt A mit dem andern Endpunkt B der Linie BC, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Anmerkung. Die Aufgabe ist unbestimmt, denn die gegebene Seite AC, läßt sich an jedem Endpunkte der beiden Abschnitte B oder C antragen und wird dann mit dem größern Abschnitte das Dreieck ABC (Fig 325. und 326.) mit dem kleinern aber das Dreieck A'BC erzeugen, welche an Gestalt und Größe sehr von einander verschieden sind. Soll daher die Aufgabe bestimmt seyn, so muß bemerkt seyn, ob die gegebene Seite dem größern oder kleinern Abschnitte zugehören soll. Sind die beiden Abschnitte einander gleich, so ist das Dreieck bestimmt.

2) Die Seite sey CA, ein Winkel an der Grundlinie sey stumpf, BC sey die Grundlinie und CD ihre Verlängerung. Fig. 327.

Auflösung. Man trage die Abschnitte BC und CD in gerader Linie aneinander, errichte an dem Endpunkte D eine unbestimmte Senkrechte und trage die Linie CA zwischen einen der Endpunkte C der Grundlinie und die senkrechte Linie, ziehe CA und verbinde mit dem Punkte A den andern Endpunkt B der Grundlinie durch BA, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Anmerkung. Auch hier entstehen zwei Dreiecke ABC und A'BC, je nachdem die gegebene Linie an den Punkt C oder B angetragen wird, oder dem stumpfen Winkel anliegt oder gegenübersteht. Die beiden Dreiecke ABC und A'BC sind an Gestalt und Größe verschieden. Soll daher die Aufgabe bestimmt seyn, so muß bemerkt werden, ob die gegebene Seite dem stumpfen Winkel anliegen oder gegenüberstehen soll. In dem Falle, als die gegebene Seite kleiner als die Summe der beiden Abschnitte ist, wird die Aufgabe bestimmt, denn alsdann muß sie dem stumpfen Winkel anliegen und das Gegentheil wäre eine Unmöglichkeit.

§. 280.

Aufgabe. Es sind die beiden Abschnitte der Grund-

linie und die ihnen zugehörige Höhe gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden.

1) Die gegebenen Abschnitte seyen BD und DC, die Höhe DA und die Winkel an der Grundlinie spitz. Fig. 325. und 326.

Auflösung. Man trage die Abschnitte in gerader Linie BDC aneinander, errichte in ihrem Vereinigungspunkte D die Höhe DA senkrecht und verbinde den Punkt A mit den Endpunkten B und C durch AB und AC, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

2) Die Höhe sey AD, der Winkel an der Grundlinie stumpf, BC sey die Grundlinie, CD ihre Verlängerung. Fig. 327.

Auflösung. Man trage beide Stücke in gerader Linie BCD aneinander, errichte auf dem Endpunkte D der verlängerten Grundlinie die Höhe DA senkrecht und verbinde A mit den Punkten B und C, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

§. 281.

Aufgabe. Die beiden Abschnitte und ein anliegender Winkel sind gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden.

1) Die Abschnitte seyen BD und DC, der Winkel x sey spitz. Fig. 328.

Auflösung. Man lege die gegebenen Abschnitte BD und DC in gerader Richtung aneinander BDC und errichte in ihrem Vereinigungspunkt D eine unbestimmte Linie senkrecht, lege an den einen Endpunkt B den gegebenen Winkel ABC = x an, verlängere seinen Schenkel bis zum Durchschnitte A mit der senkrechten DA, verbinde A mit dem andern Endpunkte C, so ist BAC das gesuchte Dreieck, denn es enthält die beiden gegebenen Abschnitte und den gegebenen Winkel.

Anmerkung. Diese Aufgabe ist unbestimmt, denn sie erzeugt zwei Dreiecke BAC, BA'C, welche den aufgestellten Forderungen entsprechen.

Der gegebene Winkel x kann nämlich an jedem der beiden Endpunkte B und C der Linie BC angelegt werden, und erzeugt jedesmal ein Dreieck, die beide, wie leicht einzusehen ist, von einander verschieden sind.

Die Aufgabe ist bestimmt, wenn bemerkt ist, an welchem Abschnitt der gegebene Winkel anliegen soll und wenn bemerkt ist, ob die, an der Grundlinie liegenden, Winkel spitz seyn sollen.

2) Der Winkel x sey ein stumpfer, BC sey die Grundlinie CD ihre Verlängerung. Fig. 329.

Auflösung. Man lege die beiden Abschnitte in gerader Linie aneinander, trage über der Linie BC den gegebenen Winkel BCA = x an, errichte in D eine senkrechte Linie bis zum Durchschnitte A mit dem Schenkel des stumpfen Winkels und ziehe AB, so ist BAC das gesuchte Dreieck.

§. 282.

Aufgabe. Es sind die Abschnitte einer Seite und der ihnen gegenüberstehende Winkel gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden, das an der gegebenen Seite zwei spitze Winkel liegen hat. Fig. 330.

Auflösung. Die Abschnitte seyen BD und DC, der Winkel x. Man lege die gegebenen Abschnitte in gerader Richtung BDC aneinander und beschreibe über der Linie BC nach §. 58. einen Kreisbogen, der den gegebenen Winkel x faßt, errichte in ihrem Vereinigungspunkte D eine senkrechte Linie DA bis zum Durchschnitte A mit der Peripherie des Halbkreises, ziehe von A Linien nach B und C, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

§. 283.

Aufgabe. Es ist die Grundlinie, ihre Verlängerung und der, der Grundlinie gegenüberstehende, Winkel gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden, das

an der Grundlinie einen stumpfen Winkel liegen hat. Fig. 331.

Auflösung. Die Verlängerung der Grundlinie sey CD, der Scheitelwinkel x, BC soll die Grundlinie des stumpfwinkligen Dreiecks bilden. Man beschreibe über BC einen Kreisbogen, der den gegebenen Winkel faßt, verlängere BC um CD, errichte in D eine senkrechte Linie und verlängere sie bis zum Durchschnitte A des Kreisbogens, ziehe von A auf B und C die Linien AC, AB, so ist BAC das gesuchte Dreieck.

Anmerkung. Da die Linie DA von einem Punkte D ausserhalb des Kreisbogens errichtet ist, so wird diese Linie den Kreisbogen entweder durchschneiden, und zwar in zwei Punkten, oder ihn berühren, oder ihn gar nicht treffen. Im ersten Falle ist die Aufgabe unbestimmt, denn von welchem Durchschnittspunkte A oder A' man auch Verbindungslinien auf B und C fällen mag, so werden zwei Dreiecke entstehen, die den Bedingungen genügen. Im zweiten Falle ist nur eine Auflösung möglich; im dritten Falle wird sie unmöglich. Die beiden Dreiecke BA'D und BAD unterscheiden sich durch die größere und kleinere Höhe und zwei verschiedene Winkel.

§. 284.

Aufgabe. Es sind die beiden Abschnitte der Grundlinie und die Summe der beiden andern Seiten des Dreiecks gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden.

1) Auflösung für ein Dreieck, an dessen Abschnitten zwei spitze Winkel liegen sollen.

Analysis. Der größere Abschnitt heiße A, der kleinere a, die Summe der beiden Seiten S, die größere Seite x, also die kleinere S — x, die Höhe y. Hieraus ergeben sich nach dem pythagoräischen Lehrsatze zwischen den Seiten, Abschnitten und der Höhe folgende zwei Gleichungen

$$y^2 = x^2 - A^2$$
$$y^2 = (S - x)^2 - a^3$$

und die Vereinigung beider führt zu folgender

$$x^2 - A^2 = (S - x)^2 - a^2$$

oder $$2Sx = S^2 + A^2 - a^2$$

und hieraus findet man die Formel für die größere Seite

$$x = \frac{S^2 + A^2 - a^2}{2S}$$

$$= \frac{1}{2}S + \frac{A^2 - a^2}{2S} = \frac{1}{2}S + \frac{1}{2}\frac{(A^2 + a)(A - a)}{S}$$

nennt man die kleinere Seite x, so gewinnt man folgende Gleichung $x^2 - a^2 = (S - x)^2 - A^2$

und hieraus erhält man für sie die Gleichung

$$x = \frac{1}{2}S - \frac{A^2 - a^2}{2S}$$

Construction. Fig. 332. Die größere Seite nach der Formel $x = \frac{1}{2}S + \frac{1}{2}\frac{(A + a)(A - a)}{S}$

Es sey die Summe der beiden Seiten S = AC, der größere Abschnitt A = AB, der kleinere a = BE. Man suche zur gegebenen Summe AC, zu AE = A + a, der Summe der beiden Abschnitte und zu CF dem Unterschiede der beiden, die vierte geometrische Proportional-Linie EG, halbire diese Linie, wodurch EK entsteht, halbire die gegebene Summe AC, wodurch AL = $\frac{1}{2}$AC wird, und zähle EK = LM zu AL, so ist AM die eine und MC die andere Seite des zu construirenden Dreiecks, aus ihnen und aus AE, welches die Summe der beiden Abschnitte, oder die Grundlinie des Dreiecks ist, läßt sich das gesuchte Dreieck APE leicht bilden. Wird eine senkrechte Linie PB von P auf B gefällt, so entstehen die beiden Abschnitte.

Der Beweis führt sich leicht.

2) Auflösung für ein stumpfwinkliges Dreieck, dessen stumpfer Winkel an der Grundlinie liegt.

Analysis. Nennt man die Grundlinie G, ihre Verlängerung bis zur Höhe a, die der Verlängerung a anliegende Seite x, so ist die andere S — x und hieraus findet man

nach dem pythagoräischen Lehrsatze folgende zwei Gleichungen
$$1)\quad (S - x)^2 - (G + a)^2 = h^2$$
$$2)\quad x^2 - a^2 = h^2$$
und hieraus durch die Vereinigung beider
$$(S - x)^2 - (G + a)^2 = x^2 - a^2$$
Wird diese Gleichung entwickelt, so entsteht
$$x = \frac{S^2 - G^2 - 2\,Ga}{2\,S}$$
$$= \tfrac{1}{2}S - \frac{G^2 + 2\,Ga}{2\,S}$$
$$= \tfrac{1}{2}S - \tfrac{1}{2}G\,\frac{G + 2\,a}{S}$$

Construction. Fig. 333. Es sey $S = AC$, $G = AB$, $a = BE$. Man suche zu $S = AC$, $G + 2a = AF$ und $G = CD$ die vierte geometrische Proportionale FG, halbire diese Linie, wodurch FK gewonnen wird, halbire ferner die gegebene Summe so, daß $AM = \frac{1}{2}AC$ wird, ziehe von $AM = \frac{1}{2}S$ die Linie $FK = \frac{1}{2}G \,.\, \frac{G + 2a}{S}$ ab, so erhält man AN, welches die an der Verlängerung der Grundlinie anliegende Seite ist. Zieht man AN von S ab, so gewinnt man die Linie NC, welches die gesuchte zweite Seite ist, aus der Grundlinie AB und den beiden gefundenen Seiten AN und NC läßt sich leicht das Dreieck APB construiren, welches das gesuchte ist.

Folgende Betrachtungen führen zur nämlichen Auflösung. Sie beruhen aber auf andern Elementen.

1) Analysis für ein Dreieck, an dessen Abschnitten der Grundlinie spitze Winkel anliegen. Fig. 334.

ABC sey ein solches Dreieck, BD und DC seyen die Abschnitte und der Winkel ABD und ACB seyen spitz. Beschreibt man mit der kleinern Seite AC von der Spitze des Dreiecks A einen Kreis CEC′, so wird die Spitze des Winkels A im Mittelpunkte des Kreises, der Endpunkt C der Linie AC in die Kreislinie und der Punkt B ausserhalb der Kreislinie fallen, der Kreis CEC′ wird also eine solche Lage haben, daß ein

Winkelpunkt des Dreieckes, im Mittelpunkt der andere in der Kreislinie, der dritte ausserhalb desselben fällt. Verlängert man nun die Seite BA bis zum Durchschnitte E in der Kreislinie, so ist $BE = BA + AE = BA + AC$
Die Linie BE ist also eine Sekante des Kreises und zugleich der Summe, den beiden Seiten des Dreiecks gleich.

Fällt man von der Spitze A auf die gegenüberstehende Seite BC eine senkrechte Linie AD und ferner auf den zweiten Durchschnittspunkt C′ die Linie AC, so entsteht das gleichschenklige Dreieck AC′C, das durch die senkrechte Linie AD in zwei congruente rechtwinklige Dreiecke getheilt wird und worin also $C'D = DC$
ist. Die Linie BC, die Summe der beiden Abschnitte bildet gleichfalls eine Sekante des Kreises CEC′.

Aus diesen Bemerkungen folgt, daß die Summe der Abschnitte und die Summe der beiden andern Seiten zwei Sekanten eines Kreises bilden, welche von einem gemeinschaftlichen Punkte ausserhalb desselben ausgehen und demnach gilt also folgende Proportion $BE : BC = BC' : BF$
Die Linie $BC' = BD - DC$ und $BF = BA - AC$, oder wenn man die obigen Bezeichnungen einführt, so hat man

$$S : A + a = A - a : BA - AC$$

Es ist also der Unterschied der beiden Seiten

$$d = BA - AC = \frac{(A + a)(A - a)}{S}$$

Aus der Summe und der Differenz zweier Größen erhält man die Größen selbst und es ist die größere Seite

$$\tfrac{1}{2}S + \tfrac{1}{2}\frac{(A + a)(A - a)}{S}$$

die kleinere $\tfrac{1}{2}S - \tfrac{1}{2}\dfrac{(A + a)(A - a)}{S}$

2) Analysis für ein Dreieck, das an der Grundlinie einen stumpfen Winkel hat. Fig. 335.

BAC sey das stumpfwinklige Dreieck. Beschreibt man mit der kleinern Seite AC von A aus einen Kreis C′EC, verlängert, wie vorhin, die Linie BA bis zum Durchschnitte E in

der Peripherie und BC bis zu C′, fällt man ferner von A aus AD senkrecht auf die verlängerte Grundlinie, so ist

$$BE = BA + AE = BA + AC$$

d. h. der Summe der beiden Seiten gleich. Ebenso sind ACD und ADC′ congruente Dreiecke, also CD = DC′. Die Linien BE und BC selbst aber sind Sekanten des Kreises CEC, die von einem gemeinschaftlichen Punkte ausserhalb desselben ausgehen, hieraus folgt die Proportion

$$BE : BC' = BC : BF$$

Nennt man, wie oben, BE = S, so ist BF der Unterschied zwischen beiden Seiten. Setzt man BC = G und CD = a, so ist CC′ = CD + DC = 2a, und demnach geht obige Proportion in folgende über

$$S : G + 2a = G : d$$

und hieraus $d = \frac{G(G + 2a)}{S}$

aus der Summe und der Differenz zweier Größen lassen sich die Größen selbst bestimmen, und es ist also die größere Seite

$$\tfrac{1}{2}S + \tfrac{1}{2}\frac{G(G + 2a)}{S}$$

die kleinere $\tfrac{1}{2}S - \tfrac{1}{2}\frac{G(G + 2a)}{S}$

§. 285.

Aufgabe. Es sind die beiden Abschnitte der Grundlinie und der Unterschied der beiden andern Seiten des Dreiecks gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden.

1) Auflösung für ein spitzwinkliges Dreieck.

Analysis. Der größere Abschnitt heiße A, der kleinere a. Nennt man die kleinere Seite x, so ist die größere x + d, und hieraus erhält man mittelst des pythagoräischen Lehrsatzes folgende zwei Gleichungen zwischen Abschnitten, Seiten und der Höhe $x^2 - a^2 = h^2$

und $(x + d)^2 - A^2 = h^2$

und hieraus durch Vereinigung

$$(x + d)^2 - A^2 = x^2 - a^2$$

oder $$x^2 + 2dx + d^2 - x^2 = A^2 - a^2$$

Es ist also die kleinere Seite

$$x = \frac{A^2 - a^2}{2d} - \tfrac{1}{2}d$$

die größere aber

$$x + d = \tfrac{1}{2}d + \frac{A^2 - a^2}{2d} = \tfrac{1}{2}d + \tfrac{1}{2}\frac{(A + a)(A - a)}{d}$$

die Construction dieser Formel fällt mit der im vorigen § gegebenen zusammen.

2) Auflösung für ein stumpfwinkliges Dreieck.

Analysis. Nennt man die kleinere Seite x, so ist die größere x + d, die Grundlinie heißt G, die Verlängerung von ihr bis zum Perpendikel a. Hieraus ergeben sich folgende Gleichungen

$$x^2 - a^2 = h^2 \text{ und } (x + d)^2 - (G + a)^2 = h^2$$

Ihre Vereinigung führt zu folgender

$$(x + d)^2 - (G + a)^2 = x^2 - a^2$$

oder $$x^2 + 2dx + d^2 - x^2 = (G + a)^2 - a^2$$

und hieraus ergibt sich die Gleichung für die kleinere Seite

$$x = \frac{(G + a)^2 - a^2}{2d} - \tfrac{1}{2}d$$

für die größere

$$x + d = \tfrac{1}{2}d + \frac{(G + a)^2 - a^2}{2d}$$

Bei anderer Darstellung geht die Formel für die kleinere Seite in folgende über

$$x = \frac{G^2 + 2Ga + a^2 - a^2}{2d} - \tfrac{1}{2}d = \tfrac{1}{2}\frac{G(G + 2a)}{d} - \tfrac{1}{2}d$$

die Formel für die größere aber in folgende

$$x + d = \tfrac{1}{2}d + \frac{G^2 + 2Ga + a^2 - a^2}{2d} = \tfrac{1}{2}d + \tfrac{1}{2}\frac{G(G + 2a)}{d}$$

die Construction dieser Formel fällt mit der im vorigen § 2te Auflösung gegebenen zusammen.

Eine zweite Auflösung für beide Fälle gewinnt man auf folgende Art:

1) für ein Dreieck, an dessen Abschnitt spitze Winkel liegen. Fig. 334.

Nach den nämlichen Bemerkungen, wie im vorigen §, läßt sich um das Dreieck ABC ein Kreis CEC′ beschreiben, worin BC die Summe der Abschnitte, BC′ ihr Unterschied und BF der Unterschied der beiden Seiten ist. Aus diesen drei Stücken läßt sich die Summe BE der beiden Seiten finden, denn es ist

$$BF : BC' = BC : BE$$

oder, wenn man die obigen Bezeichnungen einführt,

$$d : A - a = A + a : S$$

also $$S = \frac{(A + a)(A - a)}{d}$$

Ist die Summe der beiden Seiten S gefunden, so lassen sich aus ihr und ihrem Unterschied d die beiden Seiten selbst finden, und es ist die Formel für die größere

$$\tfrac{1}{2}S + \tfrac{1}{2}d = \tfrac{1}{2}\frac{(A + a)(A - a)}{d} + \tfrac{1}{2}d$$

und für die kleinere

$$\tfrac{1}{2}S - \tfrac{1}{2}d = \tfrac{1}{2}\frac{(A + a)(A - a)}{d} - \tfrac{1}{2}d$$

2) für ein stumpfwinkliges Dreieck. Fig. 335.

Gegeben ist BF, BD und CD, oder BD und CD. Demnach gewinnt man, da BF der Unterschied der beiden Seiten, BC der Unterschied der Abschnitte und BC′ ihre Summe ist, aus den Sekanten BC′ und BE folgende Gleichung

$$BF : BC = BC' : BE$$

oder $$d : G = G + 2a : S$$

und es ist $$S = \frac{G(G + 2a)}{d}$$

Demnach ist die größere

$$\tfrac{1}{2}(S + d) = \tfrac{1}{2}d + \frac{G(G + 2a)}{2d}$$

die kleinere $$\tfrac{1}{2}(S - d) = \frac{G(G + 2a)}{2d} - \tfrac{1}{2}d$$

§. 286.

§. 286.

Aufgabe. Es ist der Unterschied der Abschnitte einer Seite und es sind die beiden andern Seiten gegeben. Man soll daraus das Dreieck bilden.

1) Die beiden Seiten seyen BA und AC, der Unterschied der beiden Abschnitte sey BC′ und die beiden Winkel an den Abschnitten seyen spitz. Fig. 336.

Erste Auflösung. Man bilde aus dem Unterschied BC′ und den beiden gegebenen Seiten das Dreieck BAC′, verlängere den Unterschied BC′ und schneide auf der Verlängerung von BC mit dem Radius AC′ = AC die Linie BC ab und ziehe AC, so ist BAC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Man fälle von der Spitze A eine senkrechte Linie AD auf BC, so entstehen, wegen der rechten Winkel bei D, C′DA und ADC und der gleichen Seiten AC′ und AC die congruenten Dreiecke AC′D und ADC′. Demnach ist C′D = DC, und

$$BC' = BD - C'D = BD - DC$$

d. h. die Linie BC′ ist der Unterschied der beiden Abschnitte BD und DC der Grundlinie in dem Dreiecke ABC. Das Dreieck BAC hat ferner die gegebenen zwei Seiten, also erfüllt es die Bedingungen der Aufgabe.

2) Soll das Dreieck einen stumpfen Winkel haben, so sind die drei gegebenen Linien, die Seiten des Dreiecks selbst.

Zweite Auflösung. Aus den gegebenen Elementen leitet sich leicht folgende Auflösung ab:

1) für ein spitzwinkliges Dreieck. Fig. 334.

Setzt man den Unterschied der Abschnitte BF = D, die Summe der beiden Seiten S, ihren Unterschied d, so hat man vermittelst der Proportion für die Sekanten

$$BC : BF = BE : BC$$

oder $$D : d = S : BC$$

und es ist $$BC = \frac{S\,.\,d}{D}$$

Zählt man also die halbe Summe der Abschnitte und ihre halbe Differenz zusammen, so erhält man für die größere Seite folgende Gleichung

$$\tfrac{1}{2}S + \tfrac{1}{2}D = \frac{S\,.\,d}{2D} + \tfrac{1}{2}D = \frac{S\,.\,d + D^2}{2D}$$

Zieht man sie von einander ab, so erhält man für die kleinere folgende

$$\tfrac{1}{2}S - \tfrac{1}{2}D = \frac{S\,.\,d}{2D} - \tfrac{1}{2}D = \frac{S\,.\,d - D^2}{2D}$$

Die obige Auflösung gibt die einfachste Construction für diese Gleichungen.

2) für ein stumpfwinkliges erhält man auf diesem Wege die nämliche Gleichung.

§. 287.

Aufgabe. Es sind die beiden Abschnitte und die Summe der Höhe und einer Seite gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden.

1) Auflösung für ein spitzwinkliges Dreieck. Die Abschnitte seyen BD und DC, die Summe der Höhe und der Seite DF. Fig. 337.

Man lege die beiden Abschnitte in gerader Linie aneinander, errichte in ihrem Vereinigungspunkt D die gegebene Summe DF senkrecht, verbinde den Endpunkt F mit einem der Endpunkte C der Abschnitte durch die Linie CF und errichte in ihrem Mittelpunkte E eine senkrechte Linie bis zum Durchschnitte A mit der Summe DF, verbinde dann A mit den beiden Endpunkten der Linie BC, so ist BAC das gesuchte Dreieck.

2) Auflösung für ein stumpfwinkliges Dreieck. Die Grundlinie sey BC, die Verlängerung CD, die Summe DF.

Man verbinde BC und CD in gerader Linie, errichte im Endpunkte D die Linie DF senkrecht, ziehe von F auf einen der Endpunkte C der Grundlinie die Linie FC und verfahre, wie vorhin, so ist BAC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Da die Linie FC in ihrem Mittelpunkte E durch eine senkrechte Linie halbirt wurde, so sind die hiedurch entstandenen Dreiecke FAE und EAC congruent, also ist FA = AC und demnach ist

$$AD + AC = AD + AF = DF$$

Hieraus folgt, daß das Dreieck BAC die gegebene Summe der Seiten und die beiden Abschnitt enthält.

Anmerkung. Es erhellt leicht Fig. 337., daß zwei Dreiecke BAC und BA'C möglich sind, welche beide die gegebenen Bedingungen der Aufgabe erfüllen und an Größe und Gestalt von einander verschieden sind. Es lassen sich nämlich von dem Endpunkte F der Linie DF Verbindungslinien auf beide Endpunkte ziehen und an beiden die vorgeschriebene Construction ausführen. Wird die Verbindungslinie zwischen BF gezogen, so entsteht das Dreieck BA'C.

Die nämlichen Bemerkungen, welche so eben von einem spitzwinkligen Dreiecke gemacht wurden, lassen sich auch von einem stumpfwinkligen Fig. 338. machen. Hieraus ergibt sich also folgendes:

Die Aufgabe ist bestimmt, wenn bemerkt ist, ob an den Abschnitten nur spitze Winkel, oder ein stumpfer Winkel gebildet werden soll und ob die Summe der Höhe und der größern oder kleinern Seite gegeben ist.

Die Construction bleibt sich in allen Fällen gleich. Ist die Summe der Höhe und größern Seite gegeben, so muß die Verbindungslinie zwischen F und dem Endpunkte des größern Abschnittes, ist die der Höhe und kleinern Seite gegeben, zwischen F und dem Endpunkte des kleinern Abschnittes gezogen werden.

§. 288.

Aufgabe. Es ist der Unterschied zwischen der größern Seite und der Höhe und es sind die beiden Abschnitte der Grundlinie gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden. Fig. 339 und 340.

1) Die Abschnitte seyen BD und DC, der Unterschied DE, das Dreieck spitzwinklig.

Auflösung. Man bilde aus dem größern Abschnitte BD, dem Unterschiede DE, als Katheten, ein rechtwinkliges Dreieck BDE, verlängere die beiden Katheten durch die Spitze des rechten Winkels

und trage auf die Verlängerung von BD den kleinern Abschnitt an, halbire die Linie BE durch eine senkrechte FA bis zum Durchschnitte A mit der verlängerten Unterschiedslinie ED und verbinde den Punkt A mit den beiden Endpunkten B und C, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Vermöge der Construction sind BD und DC die beiden Abschnitte und bilden die Grundlinie in dem Dreiecke ABC, ferner sind die Dreiecke ABF und AFE congruent, also ist AB = AE und folglich

$$DE = AE - AD = AB - AD$$

Demnach ist in dem Dreiecke ABD die größere Seite um den gegebenen Unterschied DE größer, als die Höhe AD.

Anmerkung. Soll aus den beiden Abschnitten und dem Unterschiede der kleinern Seite und Höhe ein Dreieck gebildet werden, so wird auf ähnliche Weise verfahren.

2) Die Grundlinie sey BC, ihre Verlängerung CD, der Unterschied DE und das Dreieck stumpfwinklig. Fig. 340.

Auflösung. Man setze die Linien BC und CD in gerader Richtung aneinander, bilde aus BD und dem Unterschiede DE, als Katheten, das rechtwinklige Dreieck BDE, ziehe BE und verlängere ED unbestimmt. Die Linie BE halbire man durch eine Senkrechte FA bis zu ihrem Durchschnitte A mit der verlängerten ED und ziehe von A auf die Endpunkte B und C der Grundlinie die Linie AB und AC, so ist BAC das gesuchte stumpfwinklige Dreieck.

Der Beweis führt sich auf eine ähnliche Weise, wie der vorige.

Anmerkung. Ist der Ueberschuß der kleinern Seite AC über die Höhe AD gegeben, so bilde man aus der Verlängerung CD, dem Unterschiede DE ein rechtwinkliges Dreieck und verfahre wie angegeben ist.

§. 289.

Aufgabe. Es ist der Unterschied zwischen den beiden Abschnitten, die größere Seite und der zwischen ihr und dem größern Abschnitte liegende

Winkel gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden. Fig. 341.

1) Ein spitzwinkliges Dreieck.

Auflösung. Die Seite sey AB, der Unterschied BE, der Winkel x. Man trage auf die Schenkel des gegebenen Winkels die Seite BA und den Unterschied BE, verbinde die Endpunkte dieser Linien durch die gerade Linie EA, verlängere BE und beschreibe mit AE einen Kreisbogen, der die Verlängerte AE in C schneidet, ziehe AC, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Die Seite CA ist der gegebenen Linie BA gleich, der Winkel ABC = x; also enthält das Dreieck den gegebenen Winkel und Seite. Vermöge der Construction ist AE = AC und der Winkel EDA = ADC = R, weil AD senkrecht auf BC aufsteht, AD = AD, hieraus folgt, daß die Dreiecke AED und ADC congruent sind und daß also ED = DC, ebenso daß BE = BD — ED = BD — DC.

Das Dreieck ABC hat also auch zwei Abschnitte, welche um den gegebenen Unterschied von einander verschieden sind, und BD ist der größere Abschnitt, also liegt der Winkel ABD zwischen der größern Seite und dem größern Abschnitte. Daß der Winkel C ein spitzer Winkel ist, erhellt daraus, daß in dem Dreiecke ADC der Winkel bei D ein Rechter ist.

2) ein stumpfwinkliges Dreieck.

Der Unterschied der beiden Abschnitte ist die Grundlinie selbst, aus ihr, der anliegenden Seite und dem gegebenen Winkel läßt sich also leicht ein stumpfwinkliges Dreieck bilden.

Anmerkung. Ist der Unterschied der beiden Abschnitte, die kleinere Seite und der zwischen ihr und dem kleinern Abschnitte liegende Winkel gegeben und man soll daraus ein Dreieck bilden, so lassen sich bei dieser Aufgabe zwei Fälle unterscheiden:

1) Der gegebene Winkel x ist spitz, AB ist die kleinere Seite, EC der Unterschied der Abschnitte. Fig. 342.

Auflösung. Man beschreibe über der gegebenen Seite AB einen Halbkreis und trage an dem einen End-

punkte B den gegebenen Winkel x = ABC an, verlängere seinen Schenkel BC unbestimmt, so wird er, da der Winkel ABC spitz ist, die Kreislinie BDA in einem Punkte D durchschneiden, nun trage man von D aus die Sehne BD = DE und den gegebenen Unterschied EC an, verbinde die Punkte A und C durch die Linie AC, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Der Beweis führt sich nach dem vorigen leicht.

Anmerkung. Der Fall: aus der kleinern Seite, einem spitzen Winkel und aus dem Unterschied der Abschnitte (der Grundlinie) ein stumpfwinkliges Dreieck bilden, so daß der spitze Winkel im Dreieck selbst liege, fodert eine Unmöglichkeit.

2) Der gegebene Winkel ist stumpf, die kleinere Seite sey AB, der Unterschied der beiden Abschnitte BC.

Die Auflösung ist leicht, da der Unterschied der beiden Abschnitte die Grundlinie selbst ist und der stumpfe Winkel von beiden Seiten eingeschlossen wird.

§. 290.

Aufgabe. Der Unterschied der beiden Abschnitte, die größere Seite und die Höhe ist gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden.

1) Ein spitzwinkliges Dreieck. Fig. 343.

Auflösung. Die Seite sey A'B', die Höhe A'D', der Unterschied B'E': Man beschreibe über der Seite AB = A'B' einen Halbkreis BDA und trage von dem einen Endpunkte A die Höhe als Sehne ein, ziehe von dem andern durch B den Punkt D eine unbestimmte Linie und schneide von B aus auf BD den Unterschied BE = B'E' ab, verlängere BD um DC = DE und ziehe die Linie AC, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Da über der Linie AB ein Halbkreis beschrieben ist, so ist der Winkel BDA ein Rechter, die Linie AD, welche der gegebenen Höhe A'D' gleich ist, ist die Höhe in dem Dreiecke ABC; zugleich bildet die Linie AD auf BC die beiden Abschnitte BD und DC. Nun ist ED = DC, also ist auch $BE = BD - ED = BD - DC$

d. h. die beiden Abschnitte BD und DC sind um die gegebene Linie B'E' verschieden. Die Linie AD gehört gleichfalls zu dem Dreieck ABC und ist größer als AC, weil sie dem größern Abschnitte BD zugehört, der Winkel BCA ist spitz, also ist ABC das gesuchte Dreieck.

2) Ein stumpfwinkliges Dreieck construirt sich leicht, denn der Unterschied BE der beiden Abschnitte ist die Grundlinie selbst Die Construction ist §. 250. mitgetheilt.

Anmerkung. Ist der Unterschied der beiden Abschnitte, die kleinere Seite und die Höhe gegeben, und man soll daraus ein Dreieck bilden, so hat man folgende Auflösung:

1) für ein spitzwinkliges Dreieck. Fig. 342.

Die kleinere Seite sey A'B', die Höhe A'D', der Unterschied E'C'. Man beschreibe über AB einen Halbkreis und trage von dem einen Endpunkte A die gegebene Höhe A'D' = AD als Sehne ein, ziehe von dem andern Endpunkte B durch D eine unbestimmte Linie, verlängere BD um sich selbst, so daß DE = BD ist und trage daran EC = E'C', ziehe AC, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Der Beweis führt sich leicht.

2) Ein stumpfwinkliges Dreieck.

Dieses ist nur möglich, wenn der stumpfe Winkel von der kleinern Seite und dem Unterschiede der beiden Abschnitte, der Grundlinie, eingeschlossen ist. Aus diesen Linien und der Höhe läßt sich leicht nach §. 250. ein stumpfwinkliges Dreieck bilden.

§. 291.

Aufgabe. Es ist der Unterschied der beiden Abschnitte, die Höhe und der von der größern Seite und der Grundlinie eingeschlossene Winkel gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden.

1) Ein spitzwinkliges Dreieck. Fig. 344.

Auflösung. Die Höhe sey A'D', der Winkel x, der Unterschied B'E'. Man errichte auf einer unbestimmten Linie

die gegebene Höhe A'D' = AD senkrecht und trage an dem Endpunkte A den Winkel DAB = R — x, verlängere den Schenkel AB bis zum Durchschnitte B mit DB, nun schneide man den Unterschied B'E' = BE von B aus ab und mache DC = DE, ziehe AC, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Die Linie AD = A'D' steht senkrecht auf BC, also ist AD die Höhe des Dreiecks ABC und der gegebenen Höhe gleich; ferner sind wegen des rechten Winkels bei D die Winkel BAD + ABD = R,

der Winkel BAD = R — x, also ist

ABD = R — (R — x) = x

Das Dreieck enthält also auch den gegebenen Winkel, ferner ist ED = DC, also ist auch

BE = BD — ED = BD — DC

d. h. die beiden Abschnitte sind um BE verschieden. Zugleich ist BD größer als DC, also liegt der gegebene Winkel zwischen der größern Seite und dem größern Abschnitt.

2) Ein stumpfwinkliges Dreieck.

Da der Unterschied die Grundlinie selbst und die größere Seite, die dem stumpfen Winkel gegenüberstehende ist, so läßt sich aus diesem und der Höhe leicht nach §. 247. das Dreieck bilden.

Anmerkung. Es ist klar, daß in beiden Fällen der gegebene Winkel immer ein spitzer seyn müsse, wenn anders die Aufgabe möglich seyn soll.

Zusatz. Ist der Unterschied der beiden Abschnitte, die Höhe und der von der kleinern Seite und der Grundlinie eingeschlossene Winkel gegeben, und man soll daraus ein Dreieck bilden, so bemerke man folgendes:

1) Der gegebene Winkel x ist spitz, die Höhe A'D', der Unterschied B'E'.

Auflösung. Fig. 344. Man bilde aus der Höhe AD = A'D' und dem Winkel x = ACD das rechtwinklige Dreieck ADC, verlängere CD unbestimmt, mache ED = DC und BE = B'E', ziehe AC, so ist ABC das gesuchte Dreieck, wie sich leicht beweisen läßt.

Anmerkung. Ein stumpfwinkliges Dreieck unter der Bedingung zu bilden, daß der spitze Winkel innerhalb des Dreiecks liegen, und der stumpfe Winkel selbst an der Grundlinie ist unmöglich.

2) Der gegebene Winkel sey stumpf.

Da der Unterschied in diesem Falle die Grundlinie selbst ist, so hat man nach den Bedingungen der Aufgabe aus der Höhe der kleineren Seite und dem stumpfen Winkel ein Dreieck zu bilden. Die Construction hiezu gibt §. 247. an.

§. 292.

Aufgabe. Es ist der Unterschied der beiden Abschnitte einer Seite, die Summe der beiden andern und der von der größern Seite und der Grundlinie eingeschlossene Winkel gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden.

1) Ein spitzwinkliges Dreieck. Fig. 345.

Auflösung. Die Summe der Seiten sey B'F', der Winkel sey x, der Unterschied B'E'. Man trage auf die Schenkel des Winkels x = ABE die Summe BF = B'F' und den Unterschied BE = B'E' an, verbinde die Endpunkte E und F durch die Linie EF, errichte in ihrem Mittelpunkte G die Senkrechte GA bis zum Durchschnitte in A in der gegebenen Summe, ziehe AE und beschreibe mit AE einen Kreisbogen bis zum Durchschnitte C der Verlängerten BE, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Der Winkel BAC in dem Dreiecke ABC ist dem gegebenen Winkel x gleich. Die Dreiecke EAG und GAF sind vermöge der Construction congruent, also ist EA = AF, da aber auch AC = EA ist, so ist auch AC = AF und demnach ist AC + AB = AF + AB = BF

also die Summe der beiden Seiten der gegebenen Linie B'F' gleich. Nun fälle man von der Spitze A die Linie AD auf BC senkrecht, so ist AD die Höhe im Dreiecke ABC. Die Dreiecke AED und ADC sind congruent, weil AE = AC, AD = AD ist, und bei D rechte Winkel sind, demnach ist ED = DC, also ist der Abschnitt BD um den gegebenen Unter

schied BE größer als DC. Die Seite AB ist größer als AC und der Winkel ABE liegt zwischen der größern Seite und dem größern Abschnitte.

2) Ein stumpfwinkliges Dreieck.

Unter den nämlichen Bedingungen ist BAE das stumpfwinklige Dreieck. Vergleiche §. 238.

Anmerkung. Die Aufgabe ist nur möglich, wenn der von der größern Seite nnd dem größern Abschnitte eingeschlossene Winkel spitz ist.

Zusatz. Ist der Unterschied der beiden Abschnitte, die Summe der beiden andern und der zwischen der kleinern Seite und der Grundlinie liegende Winkel gegeben, und man soll daraus ein Dreieck bilden, so unterscheide man

1) Ein spitzwinkliges Dreieck. Fig. 345.

Auflösung. Der Unterschied sey B'E', die Summe der beiden Seiten B'F', der Winkel x sey spitz. Man lege an den einen Endpunkt E einen Winkel BEF = 2 R — x mit unbestimmtem Schenkel, trage von dem andern Endpunkte B die Summe B'F' = BF der beiden Seiten so an, daß ihr Endpunkt F in den Schenkel falle, errichte in dem Mittelpunkte G von EF eine senkrechte Linie GA, ziehe AE und mache AC = AE, so ist BAC das gesuchte Dreieck.

Der Beweis führt sich aus dem Vorigen leicht.

2) Ein stumpfwinkliges Dreieck.

In diesem Falle ist der gegebene Winkel x stumpf, und der Unterschied ist die Grundlinie selbst. Aus ihnen und der Summe der beiden Seiten läßt sich leicht das Dreieck ABE bilden, welches nach §. 238. das gesuchte ist.

§. 293.

Aufgabe. Es ist der Unterschied der beiden Abschnitte der Grundlinie, die Summe der beiden andern Seiten und der von ihnen eingeschlossene

Winkel gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden. Fig. 346.

Auflösung. Der gegebene Unterschied sey BE, die Summe der beiden Seiten BF, der von ihnen eingeschlossene Winkel x. Man lege an den einen Endpunkt E des Abschnitts-Unterschiedes den Winkel $BEF = R + \frac{1}{2}x$ mit unbestimmt langem Schenkel und trage von dem andern Endpunkte B die gegebene Summenlinie BF so an, daß sie mit ihrem Endpunkte F in den Schenkel EF falle, halbire die Linie EF, errichte in ihrem Mittelpunkte G die senkrechte Linie GA bis zum Durchschnitte A mit der Summenlinie BF, ziehe EA, verlängere BE und mache $AC = EA$, so ist BAC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Man ziehe von der Spitze A die Linie AD auf die Verlängerung von BE senkrecht. Nach der Construction sind die Dreiecke EAG und AGF congruent, also ist die Linie $EA = AF$ und folglich, da $EA = AC$ ist, die Linie $AF = AC$. Demnach ist in dem Dreiecke BAC

$$BA + AC = BA + AF = BF$$

Da die Linien EA und AC einander gleich sind, so ist das Dreieck EAC gleichschenklig und die Linie AD, welche senkrecht von der Spitze A auf die Grundlinie gefällt ist, theilt diese in zwei gleiche Theile und es ist also $ED = DC$, folglich auch

$$BE = BD - ED = BD - DC$$

Das Dreieck BAC hat also die gegebene Seitensumme und den gegebenen Abschnitts-Unterschied.

Nun ist noch zu zeigen, daß der Winkel BAC dem gegebenen Winkel x gleich ist. Bezeichnet man den Winkel ABC mit z, den Winkel ACB mit u, den Winkel BFE mit y und AEF mit y′, so ist wegen der congruenten Dreiecke AEG und AGF der Winkel $y = y'$, und ferner, wenn man von dem Winkel v zu dem Winkel y und y′ im Dreiecke übergeht,

$$v = y + y'$$

Endlich ist in dem gleichschenkligen Dreiecke AEC, der Winkel $u = AEC$. Ferner ist nach der Construction der Winkel $BEF = R + \frac{1}{2}x$ und der Winkel $FEC = R - \frac{1}{2}x$ als

sein Nebenwinkel. Gehet man nun von dem Winkel FEC auf die zwei Winkel z und y im Dreiecke BFE über, so ist

$$FEC = z + y$$

also auch, da $FEC = R - \frac{1}{2}x$ ist,

$$1)\quad z + y = R - \frac{1}{2}x$$

oder

$$z = R - \frac{1}{2}x - y$$

Der Winkel ist $AEC = FEC + AEF = R - \frac{1}{2}x + y$; da aber $AEC = u$ ist, so ist auch

$$2)\quad u = R - \frac{1}{2}x + y$$

Zählt man die beiden Winkel z und u zusammen, so ist

$$3)\quad z + u = 2R - x$$

also

$$x = 2R - z - u$$

Da nun in dem Dreiecke BAC der Winkel

$$BAC = 2R - z - u$$

ist, so folgt hieraus, daß der Winkel $BAC = x$, also dem gegebenen gleich ist.

Das Dreieck ABC genügt also den Forderungen der Aufgabe.

Sollte aus den oben aufgestellten Elementen ein stumpfwinkliges Dreieck gebildet werden, so fällt diese Aufgabe, da die Grundlinie der Unterschied der beiden Abschnitte selbst ist, mit §. 237. zusammen.

§. 294.

Aufgabe. Es ist der Unterschied der beiden Abschnitte, der Unterschied der beiden andern Seiten und der zwischen der größern Seite und der Grundlinie liegende Winkel gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden.

1) Ein spitzwinkliges Dreieck.

Auflösung. Fig. 347. Der gegebene Unterschied der Abschnitte sey BE, der Unterschied der Seiten BF, der Winkel x. Man trage auf die Schenkel des gegebenen Winkels die beiden Unterschiede BF und BE und verlängere diese Schenkel unbestimmt; verbinde die Endpunkte E und F durch eine gerade Linie FE, errichte in ihrem Mittelpunkte G eine senkrechte Linie GA bis zum Durchschnitte A

des verlängerten Schenkels BF, schneide auf der Verlängerung von BE die Linie AC = AF ab und ziehe AC, so ist ABC das gesuchte spitzwinklige Dreieck.

Beweis. Vermöge der Construction ist der Winkel FBE = x, also enthält das Dreieck ABC den gegebenen Winkel; ferner ist FA = AC, also ist auch

$$BF = AB - AF = BA - AC$$

d. h. die Seite AB ist um den gegebenen Unterschied BF grösser als die Seite AC, ist also auch die größere Seite. Man ziehe die Linie AE, so sind die Dreiecke AFG und AGE, vermöge der Construction congruent, also ist die Linie FA = AE. Da aber AF = AC ist, so ist auch AE = AC und das Dreieck AEC ein gleichschenkliges. Fällt man nun von A aus die senkrechte AD auf BC, so sind die Dreiecke AED und ADC congruent und die Linien ED und DC einander gleich, also ist

$$BE = BD - ED = BD - DC$$

2) Ein stumpfwinkliges Dreieck.

Da der gegebene Unterschied der Abschnitte die Grundlinie selbst ist, so fällt diese Aufgabe zusammen mit folgender, §. 239.: ein Dreieck zu bilden, wenn eine Linie, der Unterschied der beiden andern und der, der größern anliegende, Winkel gegeben ist. Das Dreieck ABE (Fig. 347.) ist das gesuchte.

Zusatz. **Ist der Unterschied der beiden Abschnitte, der Unterschied der beiden andern Seiten und der an der kleinern Seite anliegende Winkel gegeben, und man soll daraus ein Dreieck bilden**, so bemerke man

1) der Unterschied der Seiten ist EF, der Unterschied der Abschnitte BE, der Winkel x ein spitzer. Fig. 348.

Auflösung. Man trage auf die Schenkel des gegebenen Winkels BEF = x die beiden Unterschiede BE und EF, verbinde die beiden Endpunkte B und F durch die Linie BF, errichte in ihrem Mittelpunkte G eine senkrechte unbestimmte Linie, verlängere durch den Punkt E die Linien BE und EF rückwärts, bis die verlängerte EF die senkrechte Linie in dem Punkte A durchschneidet, verbinde A mit B durch

die Linie AB und beschreibe von A aus mit AC einen Kreisbogen, der die verlängerte Linie BE in dem Punkte C durchschneidet, ziehe AC, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Man fälle von A die senkrechte Linie AD auf BC. Vermöge der Construction sind die beiden Dreiecke ABG und AGF congruent; also ist die Linie AB = AF und demnach ist auch $EF = FA - AE = AB - EA$
ferner ist die Linie AE = AC, also ist auch

$$EF = AB - AC$$

d. h. die Seite BA ist um den gegebenen Unterschied FE größer als AC. Der Winkel BEF ist dem gegebenen gleich, also ist auch $x = x'$
weil es Scheitelwinkel sind, ferner sind die Linien AE und AC in dem Dreieck AEC einander gleich, also ist das Dreieck gleichschenklig und der Winkel $x' = x''$, also ist auch

$$x' = x''$$

In den beiden congruenten Dreiecken AED und ADC ist ED = DC, also ist auch

$$BE = BD - ED = BD - DC$$

Das Dreieck ABC erfüllt also die gegebenen Bedingungen der Aufgabe.

2) Ist unter den nämlichen Bedingungen der gegebene Winkel stumpf, so fällt die Aufgabe mit der §. 239. zusammen: Ein Dreieck zu bilden, wenn die eine Seite, der Unterschied der beiden andern und der der größern Seite gegenüberstehende Winkel gegeben ist. Das Dreieck ABE ist das gesuchte Dreieck.

§. 295.

Aufgabe. Es ist der Unterschied zwischen den beiden Abschnitten der Grundlinie und der zwischen den beiden andern Seiten, endlich der der Grundlinie gegenüberstehende Winkel gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden. Fig. 349.

Auflösung. Der Winkel sey x, der Unterschied der Abschnitte sey BE, der Unterschied der Seiten BF. Man

trage an den einen Endpunkt E des Abschnitt-Unterschiedes BE die Hälfte des gegebenen Winkels BEF $= \frac{1}{2}x$ mit unbestimmt langem Schenkel und trage von B aus den Seiten-Unterschied BF so an, daß sein Endpunkt F in den Schenkel EF falle, verlängere dann BF und BC unbestimmt, errichte auf dem Mittelpunkt G der Linie FE eine Senkrechte bis zum Durchschnitte A mit dem verlängerten Seiten-Unterschied, ziehe mit FA einen Kreisbogen, der den verlängerten Abschnittsunterschied in C durchschneidet, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Vermöge der Construction sind die Dreiecke FGA und GEA congruent, also ist FA $=$ AE; ferner ist die Linie FA $=$ AC. Hieraus folgt, daß

$$BF = AB - FA = AB - AC$$

d. h. daß die Seite AB um den gegebenen Unterschied BF größer als AC ist. Nun ziehe man AD von A senkrecht auf BC, so sind, da AE $=$ AC ist, die beiden Dreiecke AED und ADC congruent, also ED $=$ DC, und demnach auch

$$BE = BD - ED = BD - DC$$

d. h. die beiden Abschnitte sind um den gegebenen Unterschied verschieden. Nun ist noch zu beweisen, daß der Winkel BAC dem gegebenen Winkel x gleich ist. Zu dem Ende beschreibe man mit AF, als Radius, von A aus eine Kreislinie, so wird sie durch die Punkte F, E und C gehen; verlängere AF bis zum Durchschnitte H mit der Peripherie und ziehe HC. Da BC und BH Sekanten sind, so ist wegen der ähnlichen Dreiecke BFE und BHC, der Winkel BEF $=$ m, oder, da BEF $= \frac{1}{2}x$ ist, $\quad m = \frac{1}{2}x$
die Linie AC $=$ AH, also ist das Dreieck ACH gleichschenklig und die Winkel m und n einander gleich, also auch $n = m = \frac{1}{2}x$, und es ist der Winkel $BAC = m + n = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x$
$= x.$
Demnach hat das Dreieck ABC den gegebenen Winkel an der Spitze A.

Anmerkung. Man überzeugt sich leicht, daß die Aufgabe unmöglich wird, wenn der gegebene Unterschied BF kleiner ist, als der senkrechte Abstand des Punktes B auf den durch den Winkel BEF $= \frac{1}{2}x$ gebildeten Schenkel. Ist er größer als dieser, so sind zwei Durchschnitte des Unterschiedes mit dem Schenkel EF möglich, wovon jedoch nur der Durchschnitt F eine Auflösung möglich macht,

weil der Winkel AFE spitz wird. Durch den Punkt F′ wird keine Auflösung möglich, weil der Winkel PFE stumpf ist, und also kein Dreieck erzeugt. Der Winkel BFE $= \frac{1}{2}x$ wird immer ein spitzer seyn. Ist BFE $= 45^\circ$, so wird das Dreieck BAC reichtwinklig.

§. 296.

Aufgabe. Es ist der Unterschied der beiden Abschnitte der Grundlinie, die Summe der beiden andern Seiten und der Unterschied der Winkel an der Grundlinie gegeben. Man soll daraus das Dreieck bilden. Fig. 350.

Auflösung. Der Unterschied der Abschnitte sey BE, die Summe der beiden andern Seiten BF, der Unterschied der Winkel x. Man beschreibe über dem Abschnitts-Unterschied einen Kreisbogen BFE, welcher die Hälfte des gegebenen Winkelunterschiedes faßt, lege in diesen Kreisbogen von dem einen Endpunkte B der Linie BE die Summe BF, als Sehne, ein, ziehe FE, halbire die Linie EF, errichte in ihrem Mittelpunkte H eine Senkrechte HA bis zum Durchschnitte A der Summenlinie BF, verlängere den Abschnitt BE und mache AC $=$ AF, so ist BAC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Man ziehe die Linie AE, und AD senkrecht auf BC, so ist AE $=$ AF, als Seiten der congruenten Dreiecke AEH und AHF und AC $=$ AE, weil AC $=$ AF ist. Hieraus ergibt sich, daß das Dreieck AEF gleichschenklig ist, und daß der Winkel $y = y'$, also auch $v = y + y' = 2y$

Da aber der Winkel $y = \frac{1}{2}x$ ist, so ist auch

$$v = 2 \cdot \tfrac{1}{2}x = x$$

Das Dreieck AEC ist gleichschenklig, also ist der Winkel AEC $= u$. Geht man von dem Winkel AEC auf die Winkel z und v im Dreiecke ABE über; so ist

$$AEC = u = z + v$$

also

$$v = z - u = x$$

also sind die Winkel z und u an der Grundlinie BC des Dreiecks um den gegebenen Winkel x verschieden.

Da AF $=$ AC ist, so ist AB $+$ AC $=$ AB $+$ AF $=$ BF

Da

Da die Linie AD in dem gleichschenkligen Dreiecke AEC senkrecht aufsteht, so halbirt sie die Linie EC. Also ist ED = DC und folglich BE = BD — ED = BD — DC.

Das Dreieck ABC enthält die gegebene Seitensumme, Abschnittsunterschied und Winkelunterschied.

Anmerkung. Die Aufgabe ist so lange möglich, als die Summenlinie die Kreislinie des Bogens BFE durchschneidet, sie ist unmöglich, wenn sie diese nicht durchschneidet, sondern ihn nur berührt, oder gar nicht trifft. Im Falle die Summenlinie den Kreis berührt, entsteht ein gleichschenkliges Dreieck, welches die Bedingungen der Aufgabe nicht erfüllen kann; im Falle diese den Kreis gar nicht trifft, ist auch kein Dreieck möglich.

Durchschneidet die Summenlinie die Kreislinie, so sind zwei Durchschnitte möglich, die aber zwei unter sich congruente Dreiecke liefern.

§. 297.

Aufgabe. Es ist die Höhe, der Unterschied der Abschnitte der Grundlinie und der ihr anliegende Winkel gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden. Fig. 351.

Auflösung. Die Höhe sey FG, der Unterschied der Abschnitte BE, der Unterschied der Winkel x. Man bilde über dem Unterschiede BE einen Kreisbogen BAE, welcher den Unterschiedswinkel faßt, verlängere den Unterschied unbestimmt, errichte auf irgend einem Punkte F dieser Linie die gegebene Höhe senkrecht und ziehe eine Linie GA mit der Linie BE parallel bis zum Durchschnitte A der Kreislinie des Bogens, ziehe die Linien AB und AE, mache AC = AE, so ist BAC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Man ziehe die Linie AD auf BC senkrecht, so ist sie wegen der Parallelen GA und BC der Linie GF gleich, also hat das Dreieck ABC die gesuchte Höhe. Die Linie AE = AC, also ist das Dreieck EAC gleichschenklig und AD theilt die Grundlinie EC in gleiche Theile, also ist ED = DC und

BE = BD — ED = BD — DC

also hat das Dreieck ABC den Abschnittsunterschied.

Der Winkel v ist dem gegebenen Winkel nach der Construction gleich, eben so ist der Winkel $u = AEC$, ferner ist der Winkel $AEC = z + v$

also $v = AEC - z = u - z$

Also hat das Dreieck ABC zwei Winkel an der Grundlinie, welche den gegebenen Unterschied haben und erfüllt die Bedingungen der Aufgabe.

§. 298.

Aufgabe. Es sind die beiden Abschnitte einer Seite und der anliegende Abschnitt einer der beiden andern Seiten gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden.

1) Ein spitzwinkliges Dreieck. Fig. 352.

Auflösung. Die beiden Abschnitte seyen BD und DC, der an dem kleinern Abschnitt liegende BF. Man setze die Abschnitte BD und DC in gerader Linie aneinander und errichte in ihrem Vereinigungspunkt D eine unbestimmte Senkrechte, beschreibe über ihr einen Halbkreis BFC, trage von dem Endpunkte B des kleinern Abschnittes BD den Abschnitt BF, als Sehne, in den Halbkreis, verlängere sie bis zum Durchschnitte A der unbestimmten senkrechten Linie AD und ziehe AC, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Die Linie AD bildet die Höhe in dem Dreieck ABC und erzeugt auf der Grundlinie BC die beiden Abschnitte welche den gegebenen Linien BD und DC gleich sind. Der Winkel BFC ist ein Rechter, also steht FC senkrecht auf BA und erzeugt zwei Abschnitte, wovon BF der anliegende ist. Der Fall, wenn der an dem größern Abschnitte anliegende gegeben ist, construirt sich leicht.

2. Ein stumpfwinkliges Dreieck. Fig. 353.

a) Die Grundlinie sey B′C′, ihre Verlängerung B′D′, der an der kleinern Seite liegende Abschnitt (oder ihr Verlängerung) B′F′ sey gegeben.

Auflösung. Man setze die Grundlinie $BC = B'C'$ und ihre Verlängerung $DB = D'B'$ in gerader Linie anein-

ander, errichte in D eine unbestimmte Linie senkrecht, beschreibe auf der entgegengesetzten Seite der Grundlinie BC einen Halbkreis BFC und trage von B die Linie BF = B'F' als Sehne ein und verlängere sie rückwärts, daß sie die Linie AD in einem Punkte A durchschneide, ziehe AC, so ist ABC das gesuchte stumpfwinklige Dreieck.

b) Unter den nämlichen Bedingungen, wie vorhin, sey E'C' der Abschnitt der größern Linie.

Auflösung. Man beschreibe über der Linie BC einen Halbkreis BEC, trage von C aus die Linie CE = CE', als Sehne, in den Halbkreis, verlängere sie bis zum Durchschnitte A mit der senkrechten Linie AD und ziehe AB, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Der Beweis für beide Fälle führt sich leicht.

Zweite Auflösung. Fig. 352. Setzt man den grössern Abschnitt DC = α, den kleinern BD = a, BF = A, und nimmt man den vierten Abschnitt FA als den zu suchenden an, so hat man wegen der ähnlichen Dreiecke BFC und ABD folgende Proportion

$$BF : BD + DC = BD : BF + EA$$

oder

$$A : \alpha + a = a : A + x$$

und hieraus, wenn man die Grundlinie G für die beiden Abschnitte α und a setzt

$$G \,.\, a = A^2 + Ax$$

also

$$x = \frac{G \,.\, a - A^2}{A} = \frac{G \,.\, a}{A} - A.$$

Zählt man zu A = FA den ihm zugehörigen Abschnitt x, so erhält man die ganze anliegende Seite S und es ist

$$S = x + A = \frac{G \,.\, a}{A}$$

die vierte geometrische Proportionale zu dem anliegenden Abschnitte der Grundlinie und ihrem kleinern Abschnitte ist die anliegende Seite. Hat man diese gefunden, so kann man leicht nach §. 279. das Dreieck bilden.

§. 299.

Aufgabe. Es ist ein Abschnitt und die ihm zugehörige Höhe und diejenige Höhe, welche der Seite zugehört, die an dem andern Abschnitte der Grundlinie liegt, gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden.

1) Ein spitzwinkliges Dreieck. Fig. 354.

Auflösung. Der gegebene Abschnitt sey B'D', die ihm zugehörige Höhe A'D' und B'E' die zweite Höhe. Man bilde aus der Höhe AD = A'D' und dem Abschnitte B'D' = BD, als Katheten, ein rechtwinkliges Dreieck ABD, beschreibe von dem Punkte B aus, durch den die gegebene Höhe B'E' gehen soll, einen Kreisbogen HEM mit dem Radius BE = B'E', ziehe von dem Endpunkte der Höhe A eine Tangente an diesen Kreisbogen und verlängere sie bis zum Durchschnitte in C mit der verlängerten Abschnittslinie BD, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Vermöge der Construction enthält das Dreieck ABC den gegebenen Abschnitt B'D' = BD und Höhe A'D' = AD. Wird von B aus auf den Berührungspunkt E der Linie AC die Linie BE gezogen, so steht sie senkrecht auf AC und ist der gegebenen zweiten Höhe gleich.

2) Ein stumpfwinkliges Dreieck.

a) Ist der gegebene Abschnitt DC der größere, so verfahre man Fig. 355. wie oben und beschreibe mit der zweiten Höhe FC einen Kreisbogen pFq gegen die Höhe AD zu und ziehe an ihn die Tangente AB bis zum Durchschnitte B;

b) ist der gegebene Abschnitt der kleinere, so beschreibe man Fig. 356. den Kreisbogen HEM von der Höhe AD wegwärts und ziehe die Tangente AC bis zum Durchschnitte C, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Anmerkung. Soll ein spitzwinkliges Dreieck möglich seyn, so muß der Kreisbogen HEM, der mit der gegebenen Höhe, als Radius, gezogen wurde, die Höhe AD durchschneiden, d. h. die Höhe BE muß kleiner seyn, als die Seite AB und größer, als der

Abschnitt BD ist. Ist sie eben so groß oder größer als AB, oder wird sie eben so groß oder kleiner als BD, so ist kein spitzwinkliges Dreieck mehr möglich, es wird entweder recht- oder stumpfwinklig. Die Größe der Höhe BE ist also zwischen die Gränzen von BD und AB eingeschlossen, und ist durch folgende Bestimmungen gegeben

$$BE > BD$$
$$BE < \sqrt{BD^2 + AD^2}$$

Die Aufgabe für ein stumpfwinkliges Dreieck ist nach Fig. 355. nur so lange möglich, als die Höhe CF kleiner ist als DC, nach Fig. 356. nur so lange als BE kleiner als AD ist; denn würde sie der Höhe AD gleich, so ginge die ihr zugehörige Tangente parallel mit der Grundlinie, würde sie größer, würde sie divergiren und also keinen Durchschnitt geben.

Zweite Auflösung. Fig. 354. Man nenne den gegebenen Abschnitt A, die ihm zugehörige Höhe AD = H, die zweite Höhe BE = h und den Abschnitt DC = x, so ist die, der Höhe BE zugehörige, Seite AC, die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete die erste Höhe H, und die andere der unbekannte Abschnitt ist. Hiernach ist

$$1)\quad AC = \sqrt{H^2 + x^2}$$

Der Inhalt eines Dreiecks läßt sich durch jede Seite und die ihr zugehörige Höhe ausdrücken, und es ist daher der Flächeninhalt des Dreiecks ABC

$$2)\quad \tfrac{1}{2} BC \,.\, AD = \tfrac{1}{2}(A + x) \,.\, H$$
$$3)\quad \tfrac{1}{2} AC \,.\, BE = \tfrac{1}{2}(h \sqrt{H + x^2})$$

und hieraus durch Vereinigung der beiden Gleichungen

$$(A + x)\, H = h \sqrt{H^2 + x^2}$$

Wird diese Gleichung ins Quadrat erhoben, so entsteht

$$H^2 \,.\, A^2 + 2 A H^2 x + H^2 x^2 = h^2 H^2 + h^2 x^2$$

und es ist

$$(H^2 - h^2)\, x^2 + 2 A\, H^2 x = H^2 h^2 - H^2 A^2$$

$$\text{oder} \qquad x^2 + \frac{2 A\; H^2}{H^2 - h^2}\, x = \frac{H^2 (h^2 - A^2)}{H^2 - h^2}$$

Wird $\left(\frac{A\; H^2}{H^2 - h^2}\right)^2$ auf beiden Seiten zugezählt, so entsteht

$$\left(x + \frac{A \,.\, H^2}{H^2 - h^2}\right)^2 = \frac{H^2 (h^2 - A^2)}{H^2 - h^2} + \left(\frac{A\; H^2}{H^2 - h^2}\right)^2$$

und hieraus

$$x = \sqrt{\left(\frac{H^2 (h^2 - A^2)}{H^2 - h^2} + \frac{A^2 H^4}{(H^2 - h^2)^2}\right)} - \frac{A . H^2}{H^2 - h^2}$$

Diese Formel läßt sich nach den Lehren des zweiten Kapitels construiren.

§. 300.

Aufgabe. Es ist ein Abschnitt einer Seite, die ihm zugehörige Höhe und die Höhe, welche derjenigen Seite zugehört, die dem gegebenen Abschnitte anliegt, gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden.

1) Ein spitzwinkliges Dreieck. Fig. 357.

Auflösung. Der Abschnitt sey BD, die zugehörige Höhe DA und die Höhe sey C'F'. Man bilde aus BD und AD, als Katheten, das rechtwinklige Dreieck ABD und errichte auf der Hypotenuse AB die Höhe C'F' = AC' senkrecht und ziehe durch ihren Endpunkt C' eine Parallele mit BA, verlängere BD bis zum Durchschnitte C mit der Parallele C'C und ziehe AC, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

2) Ein stumpfwinkliges Dreieck. Fig. 358.

a) Wenn der größere Abschnitt DC und die Höhen AD und B'E' gegeben sind. Man suche zu AD und DC die Hypotenuse AC und errichte auf der Hypotenuse gegen AD zu die Höhe C'F' = AB', ziehe die Parallele B'B und vollende das Dreieck ABC, so ist es das gesuchte.

b) Wenn der kleinere Abschnitt DB und die Höhe F'C' gegeben ist. Man suche zu AD und DB die Hypotenuse AB, errichte auf ihr in der Richtung von AD wegwärts die Höhe AC' = F'C' senkrecht, ziehe die Parallele C'C und vollende das Dreieck ABC, so ist es das gesuchte.

Zweite Auflösung für ein spitzwinkliges Dreieck. Fig. 357. Setzt man den Abschnitt BD = A, den Abschnitt DC = x, die ihm zugehörige Höhe H, die zweite Höhe h,

so hat man nach dem pythagoräischen Lehrsatze in dem rechtwinkligen Dreiecke ABD folgende Gleichung für die Hypotenuse

$$BA = \sqrt{BD^2 + AD^2} = \sqrt{A^2 + H^2}$$

Der Inhalt des Dreiecks ABC läßt sich auf folgende zwei verschiedene Arten durch die Seiten und ihnen zugehörigen Höhen darstellen

1) $\frac{1}{2} BA \,.\, FC = \frac{1}{2} h \sqrt{A^2 + H^2}$

2) $\frac{1}{2} (BD + DC)\, AD = \frac{1}{2} (A + x)\, H$

und hieraus durch Vereinigung

$$h \,.\, \sqrt{A^2 + H^2} = AH + Hx$$

Es ist also x

$$\frac{h \sqrt{(A^2 + H^2)}}{H} - A = x$$

2) Für ein stumpfwinkliges Dreieck. Fig. 358.

a) Wenn der größere Abschnitt A (die Grundlinie und ihre Verlängerung), die ihm zugehörige Höhe H und die der größern Seite zugehörige Höhe h gegeben ist, so ist die Grundlinie

$$x = A - \frac{h \sqrt{(H^2 + A^2)}}{H}$$

b) Wenn der kleinere Abschnitt a (Verlängerung der Grundlinie), die ihm zugehörige Höhe H und die der kleinern Seite zugehörige h gegeben ist, so ist die Grundlinie

$$x = \frac{h \sqrt{(a^2 + H^2)}}{H}$$

D

Aufgaben über das Dreieck, wenn unter den gegebenen Elementen auch die Halbirungs-Linien der Seiten und Winkel vorkommen.

---

§. 301.

Aufgabe. Es ist die, einen Winkel halbirende Linie, der Winkel, welchen sie halbirt, und ein anliegender Winkel gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden. Fig. 359.

Erste Auflösung. Die Linie sey A'W', der Winkel, den sie halbirt x, der andere y. Man halbire den gegebenen Winkel x = BAC und trage auf die halbirende Linie A'W' = AW auf, lege an ihren Endpunkt W den Winkel AWC = y + $\frac{1}{2}$x und ziehe durch den Endpunkt W in der Verlängerung von WC die Linie BWC so, daß sie den Schenkel des Winkels BAC durchschneidet, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Nach der Construction ist BAC = x und m = n, also halbirt die Linie AW den Winkel bei A, der Winkel AWC = y + $\frac{1}{2}$x. Da nun m = $\frac{1}{2}$x ist, so ist in dem Dreiecke ABW der Winkel bei B = AWC — $\frac{1}{2}$x = y. Also hat das Dreieck ABC die gegebenen Winkel und die Linie AW.

Zweite Auflösung. Man halbire den Winkel x = BAC, trage auf die halbirende Linie die gegebene Linie AW = A'W' auf, lege an irgend einem Punkte b den andern Winkel Abc = y und ziehe bc bis zum Durchschnitte c mit AC, und mit bc die Linie BC durch den Punkt W parallel, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Der Beweis führt sich leicht durch die ähnlichen Dreiecke Abc und ABC.

Anmerkung. Sind die beiden Winkel an der Grundlinie B und C gegeben, so läßt sich durch sie der bei A bestimmen, und die Auflösung bleibt dieselbe, oder man kann auch an die Endpunkte irgend einer geraden Linie die gegebenen Winkel antragen und ein Dreieck bilden, den Winkel an der Spitze halbiren und dann nach der zweiten Auflösung verfahren.

§. 302.

Aufgabe. Es ist die, eine Seite halbirende, Linie, der Winkel durch den sie geht, und ein zweiter Winkel gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden. Fig. 360.

Auflösung. Die Linie sey A'H', der Winkel, durch den sie geht x, der andere y. Man mache den Winkel bAc = x und trage an irgend einem Punkte b einer seiner Schenkel AB, den zweiten Winkel y = Abc und ziehe bc, halbire die Linie bc, ziehe durch ihren Mittelpunkt h die Linie AH = A'H' und durch den Punkt H die Linie BC parallel mit bc, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

§. 303.

Aufgabe. Es ist eine Seite, der gegenüberstehende Winkel und die, diesen Winkel halbirende Linie gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden. Fig. 361.

Erörterung. Das gesuchte Dreieck sey ABC, die Linie AW = W sey die Linie, welche den Winkel halbirt; BC = G sey die Grundlinie; der Winkel ABC sey der Winkel an der Spitze, um das Dreieck sey ein Kreis beschrieben. Man ziehe den Durchmesser des Kreises FM senkrecht auf die Mitte G der Grundlinie BC, so halbirt FM den der Sehne zugehörigen Bogen BMC in M, verlängert man die Linie AW, so muß ihre Verlängerung den Punkt M treffen, weil die Winkel p und q einander gleich sind, und beide über gleichen Bogen BM und MC aufstehen. Verbindet man nun A und F durch die gerade Linie AF, so ist das Dreieck AFM rechtwinklig; eben so ist WGM rechtwinklig. Beide Dreiecke haben den Winkel M

gemeinschaftlich; also sind die beiden Dreiecke ähnlich. Wäre WM bekannt, so wäre auch, da AW gegeben ist, AM bekannt und die Aufgabe sofort gelöst. Diese Linie läßt sich durch folgende Proportion finden

$$MF : AM = WM : GM$$

oder, wenn man FG = a, GM = b, WM = x setzt,

$$a + b : W + x = x : b$$

oder $$x^2 + xW = a^2 + a \,.\, b$$

und hieraus $$x = \sqrt{b^2 + ab + \tfrac{1}{4}W^2} - \tfrac{1}{2}W$$

Berücksichtigt man nun, daß die Hälfte der Grundlinie, als die halbe Sehne, die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden Abschnitten des Diameters ist, so ist

$$ab = BG^2 = \tfrac{1}{4}G^2$$

und demnach geht obige Formel in folgende über

$$x = \sqrt{b^2 + \tfrac{1}{4}G^2 + \tfrac{1}{4}w^2} - \tfrac{1}{2}w$$

oder, wenn man die ganze Linie AM = W + x bestimmt,

$$AM = \sqrt{b^2 + \tfrac{1}{4}G^2 + \tfrac{1}{2}w^2} + \tfrac{1}{2}w$$

Construction. Man beschreibe über der gegebenen Grundlinie BC einen Kreis BAFM, welcher den gegebenen Winkel x faßt, errichte in dem Mittelpunkte G der Grundlinie BC einen Durchmesser MF senkrecht, verbinde die Punkte B und M durch eine gerade Linie BM und errichte in M die Linie MK = $\tfrac{1}{2}$w senkrecht, ziehe BK, verlängere BK um KF = $\tfrac{1}{2}$w, so ist BP die gesuchte Linie AM. Mit dieser Linie beschreibe man von M aus einen zweiten Kreisbogen, der den erstern in A durchschneiden wird, und ziehe von A nach B und C die Linien AB und BC, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Es ist die Linie

$$BM = \sqrt{BG^2 + GM^2} = \sqrt{b^2 + \tfrac{1}{4}G^2}$$

$$BK = \sqrt{BM^2 + MK^2} = \sqrt{b^2 + \tfrac{1}{4}G^2 + \tfrac{1}{4}W^2}$$

und $$BF = \sqrt{b^2 + \tfrac{1}{4}G^2 + \tfrac{1}{4}W^2} + \tfrac{1}{2}W$$

also $$AM = BP = \sqrt{b^2 + \tfrac{1}{4}G^2 + \tfrac{1}{4}W} + \tfrac{1}{2}W$$
$$= W + WM$$

Anmerkung. Auf der Größe der Linie AM beruht die Möglichkeit der Construction vorliegender Aufgabe. Sie ist unmöglich,

wenn AM größer, als der Durchmesser des Kreises wird. Ist sie kleiner, so entstehen zwei unter sich congruente Dreiecke, ist sie dem Durchmesser gleich, so wird der zweite Kreis den ersten in F berühren, und dann entsteht nur ein mögliches Dreieck.

§. 304.

Aufgabe. Es ist die, eine Seite halbirende Linie, diese Seite und ein ihr anliegender Winkel gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden. Fig. 362.

Auflösung. Die Seite des Dreiecks sey BC, die halbirende Linie A'H', der Winkel x. Man lege an dem einen Endpunkte B der Linie BC den Winkel CBA = x unter unbestimmten Schenkel, halbire die Linie BC, beschreibe mit der halbirenden Linie AH = A'H' einen Kreisbogen, der den Schenkel BA in A durchschneidet und ziehe AC, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Anmerkung. Die Aufgabe ist nur so lange möglich, als die halbirende Linie AH gleich oder größer ist, als der senkrechte Abstand des Mittelpunkts H von dem Schenkel AB. Ist sie kleiner, so ist die Aufgabe unmöglich; ist sie kleiner als die Hälfte der halbirenden Seite BC und größer als der senkrechte Abstand, so sind zwei Durchschnitte in dem Schenkel BA, also auch zwei Dreiecke möglich, und in diesem Falle ist die Aufgabe unbestimmt, wenn nicht bemerkt ist, ob das Dreieck spitzwinklig oder stumpfwinklig seyn soll. Ist die halbirende Linie AH größer als BH, so ist nur ein Dreieck möglich.

§. 305.

Aufgabe. Es ist die, eine Seite halbirende Linie, diese Seite und der ihr gegenüberstehende Winkel gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden. Fig. 363.

Auflösung. Die gegebene Seite sey BC, die halbirende Linie AH, der Winkel x. Man beschreibe über der Linie BC einen Kreisbogen, der den gegebenen Winkel x faßt, halbire die Linie BC und beschreibe von ihrem Mittelpunkte H aus mit HA einen zweiten Kreisbogen, der den ersten in A durchschnei-

det, ziehe von A die Linien AB und AC, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Anmerkung. Der mit der Linie AH gezogene Kreisbogen durchschneidet entweder erstern oder berührt ihn nur, oder berührt und durchschneidet ihn nicht. Im ersten Falle sind zwei, jedoch congruente, Dreiecke möglich, im zweiten Falle nur eines, im dritten Falle ist die Aufgabe unmöglich.

§. 306.

Aufgabe. Es ist eine Seite, die, diese Seite halbirende, Linie und eine anliegende Seite gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden. Fig. 362.

Auflösung. Die halbirende Linie sey AH, die ihr zugehörige Seite BC, die anliegende AC. Man bilde aus AH und der Hälfte von BC = HC und HA ein Dreieck und ziehe AB, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

§. 307.

Aufgabe. Es sind zwei Seiten und die, die dritte Seite halbirende, Linie gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden. Fig. 364.

Auflösung. Die halbirende Linie sey A'H', die eine Seite B'A', die andere A'C'. Man bilde aus der doppelten Halbirungslinie 2 A'H' = BE, der Seite A'C' = EA und BA = B'A' das Dreieck EBA, verlängere EA um sich selbst so, daß AC = EA = A'C' ist, ziehe BC, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Man halbire die Linie BC und ziehe AH, so ist AH der gegebenen Halbirungslinie A'H' gleich, denn es ist EA = AC und BH = HC, also ist

$$EA : AC = BH : HC$$

d. h. die Linie AH geht mit EB parallel. Hieraus folgt

$$EB : AH = BC : HC = 2 : 1$$

also ist $AH = \frac{1}{2} EB = \frac{1}{2} . 2 . A'H' = AH$

Ferner ist nach der Construction die Seite BA = B'A' und

AC = A'C'. Das Dreieck ABC genügt also den Bedingungen der Aufgabe.

Anmerkung. Zwei andere Auflösungen dieser Aufgabe sind schon §. 36. und §. 106. gegeben.

§. 308.

Aufgabe. Es ist die, den Scheitelwinkel halbirende, Linie, die Höhe und der, dem größern Abschnitte der Grundlinie anliegende, Winkel gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden. Fig. 365.

Auflösung. Die halbirende Linie sey A'W', die Höhe A'D' und der Winkel x. Man errichte auf irgend einem Punkte D einer unbestimmten Linie die Höhe AD = A'D' senkrecht und lege an den Endpunkt A dieser Linie einen Winkel DAB = R — x, verlängere seinen Schenkel AB bis zum Durchschnitte B mit BD, trage von A aus die Linie AW = A'W' auf und mache den Winkel WAC = BAW, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Der Winkel BAD = R — x; der Winkel bei D = R, also ist der Winkel ABD = R — (R — x) = x und dem gegebenen gleich. Die Linie AD ist, weil sie senkrecht auf BC steht, die Höhe des Dreiecks ABC und der Linie A'D' gleich; der Winkel BAW = WAC, also halbirt die Linie AW den Scheitelwinkel des Dreiecks und folglich entspricht das Dreieck ABC den Bedingungen der Aufgabe.

§. 309.

Aufgabe. Es ist die, den Scheitelwinkel halbirende, Linie, die Höhe und der am kleinern Abschnitt liegende Winkel gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden. Fig. 365.

Auflösung. Die Halbirungslinie ist AW, die Höhe AD, und der Winkel y. Man verfahre, wie vorhin, errichte AD

senkrecht und mache den Winkel DAC = R — y, trage die Halbirungslinie AW auf die Verlängerung des kleinern Abschnittes DC und mache den Winkel WAB = WAC, so ist BAC das gesuchte Dreieck.

Der Beweis führt sich wie der des vorigen §.

§. 310.

Aufgabe. Es ist die, den Scheitelwinkel halbirende Linie, die Höhe und der Scheitelwinkel gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden. Fig. 365.

Auflösung. Die halbirende Linie sey AW, die Höhe AD, der Scheitelwinkel x. Man bilde aus der Halbirungs-Linie AW, als Hypotenuse, und der Höhe AD, als Kathete, das rechtwinklige Dreieck AWD, trage auf beide Seiten der Halbirungslinie AW die Hälfte des gegebenen Winkels BAW = $\frac{1}{2}$x und WAC = $\frac{1}{2}$x, verlängere die Linie WD bis zu den Durchschnitten B und C der beiden Schenkel der genannten Winkel, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

§. 311.

Aufgabe. Es ist die Höhe, ein Winkel an der Grundlinie und die, letztere halbirende, Linie gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden. Fig. 366.

1) Die Höhe sey AD, die halbirende Linie AH und der gegebene Winkel x ein spitzer.

Auflösung. Man bilde aus AD, als Kathete, und AH, als Hypotenuse, das rechtwinklige Dreieck AHD und lege an die Linie AD an dem Punkte A den Winkel BAD = R — x, ziehe AB bis sie in dem Punkte B die Verlängerung von DH trifft, mache HC = HB und ziehe AC, so ist BAC das gesuchte Dreieck.

2) Der gegebene Winkel x sey stumpf. Fig. 367.

Auflösung. Man bilde aus AH, als Hypotenuse, und AD, als Kathete, ein rechtwinkliges Dreieck AHD, lege an AD im Punkte A den Winkel DAC = R — x, ziehe AC bis zum Durchschnitte C mit HD, mache HB = HC und ziehe AB, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

§. 312.

Aufgabe. Es ist die Höhe, die Grundlinie und die, letztere halbirende, Linie gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden. Fig. 366. und 367.

Auflösung. Die Grundlinie sey BC, die halbirende Linie AH, die Höhe AD. Man bilde aus der Höhe AD, als Kathete, und AH, als Hypotenuse, das rechtwinklige Dreieck AHD, verlängere HD und trage auf beiden Seiten die Linien HB = HC = $\frac{1}{2}$ BC an, ziehe AB und AC, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

§. 313.

Aufgabe. Die einer Seite zugehörige Halbirungs-Linie und Höhe, und der ihr gegenüberstehende Winkel ist gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden. Fig. 368.

Auflösung. Die Halbirungslinie sey AH, die Höhe AD und der Winkel x. Man bilde aus AH, als Hypotenuse, und AD, als Kathete, das rechtwinklige Dreieck ADH, verlängere die Linie DH unbestimmt und schneide auf beiden Seiten von H mit beliebiger Oeffnung des Zirkels zwei gleiche Stücke Hb und Hc ab, beschreibe über bc einen Kreisbogen bac, der den gegebenen Winkel x faßt, ziehe von dem Punkte a, in welchem die Linie AH den Kreisbogen durchschneidet, die Linien ab und ac und mit diesen von dem Punkte A die AB und AC parallel, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Die gegebene Höhe AD steht auf BC senkrecht und ist also die Höhe in dem Dreiecke ABC.

Da ba mit BA und ac mit AC parallel geht, so ist auch der Winkel BAC dem Winkel bac oder dem gegebenen Winkel x gleich.

Da in dem Dreiecke AHC die Linie ac mit AC parallel geht, so verhält sich $Aa : aH = cC : Hc$
eben so verhält sich aus dem nämlichen Grunde in den Dreiecken ABH und abH

$$Aa : AH = Bb : bH$$

aus der Vereinigung beider Proportionen gewinnt man folgende

$$cC : Hc = Bb : bH$$

oder durch Versetzung der beiden mittlern Glieder

$$cC : Bb = Hc : bH$$

Da nun nach der Construction $Hc = bH$ ist, so ist auch $cC = Bb$, also auch $Hb + bB = Hc + cC$
oder $HB = AC$
d. h. die Linie AH halbirt in dem Dreiecke ABC die Linie BC. Das Dreieck ABC erfüllt also die Bedingungen der Aufgabe.

§. 314.

Aufgabe. Es ist ein Winkel, die ihn halbirende Linie und die Summe der drei Seiten gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden. Fig. 369

Auflösung. Der Winkel sey x, die Summe der Seiten PQ, die Halbirungslinie A'W'. Man trage auf jeden Schenkel des gegebebenen Winkels $x = EAF$ die Hälfte der Seitensumme $AE = \frac{1}{2}PQ$ und $AF = \frac{1}{2}PQ$, errichte auf den Endpunkten E und F die senkrechten Linien ED und FD bis zu ihrem Durchschnitte in D und bilde mit $ED = DF$ als Radius einen Kreis FGE, ziehe die Verbindungslinie AD, schneide auf ihr die Halbirungslinie $AW = A'W'$ ab und lege von W eine Tangente CGB an den Kreis, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis.

Beweis. Da die Linie AE = AF, ED = DE und AD = AD ist, so sind die beiden Dreiecke AED und ADF congruent, also der Winkel BAC = x durch die Linie AW in zwei gleiche Theile getheilt.

Da die Linie AE = AF auf dem Endpunkte E und F des Radius ED und AF auf DF senkrecht aufsteht, so sind diese Linien Tangenten des Kreises EGF. Die Linie CGB ist gleichfalls eine Tangente zu dem Kreise EGF. Nun ist bekannt, daß zwei Tangenten eines Kreises, die von einem gemeinschaftlichem Punkte ausserhalb desselben ausgehen, einander gleich sind. Wendet man dieß auf die Tangenten BG und BE, CG und CF an, so ist

$$GB = BE \text{ und } CG = CG$$

und hieraus folgt, daß

$$AB + BE = AB + BG$$

und

$$AC + CF = AC + CG$$

Wird Gleiches zu Gleichem gezählt, so erhält man Gleiches und es entsteht

$$AB + BG + GC + AC = AB + BE + AC + CF$$

oder

$$AB + BC + AC = AE + AF = PQ$$

d. h. der Umfang des Dreiecks ABC ist der gegebenen Linie PQ gleich. Das Dreieck ABC erfüllt also die Bedingungen der Aufgabe.

§. 315.

Aufgabe. Es ist ein Winkel, die ihn halbirende Linie und der Unterschied zwischen der Summe der ihn einschließenden Seiten und zwischen der dritten gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden. Fig. 370.

Auflösung. Der Winkel sey x, die Halbirungslinie sey AW, der Unterschied MP. Man halbire den Seitenunterschied und trage auf die Schenkel des Winkels x = BAC die

Hälfte des Unterschiedes AD = AE = ½ MP, errichte in den Endpunkten E und D zwei senkrechte Linien EM und DM bis zu ihrem Durchschnitte in M, ziehe mit ME, als Radius, den Kreis KED, ziehe von A durch des Kreises Mittelpunkt eine Linie und trage auf sie die Halbirungslinie AW auf, ziehe sodann von dem Endpunkte W an den Kreis die Tangente BC bis zu den Durchschnitten B und C mit den Verlängerungen der Linien AD und AE, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Das Dreieck hat den gegebenen Winkel und die gegebene Halbirungslinie. Da AE = AD, die Linie AM durch M geht, also AM = AM und bei D und E rechte Winkel sind, so sind die beiden Dreiecke congruent, MD = EM, und der Winkel DAM = MAE; die Linie AW halbirt also den Winkel BAC.

Hieraus erhellt ferner, daß AC und AB Tangenten sind. Die Linie BC ist nach der Construction gleichfalls eine Tangente, also ist CK = CE, BK = BD und folglich

$$\begin{aligned} AE + AD = MP &= BA - BD + AC - EC = \\ &= BA + AC - (BD + EC) \\ &= BA + AC - (BK + KC) = BA + AC - BC \end{aligned}$$

Anmerkung. Man erkennt leicht, daß sich von dem Punkte W aus zwei Tangenten an den Kreis DEK legen lassen, wodurch zwei verschiedene Dreiecke entstehen, die jedoch nur der Lage nach von einander verschieden sind. Die Aufgabe wird unmöglich, wenn der Punkt W in den Kreis DEK fällt.

§. 316.

Aufgabe. Es ist eine Seite und es sind die den beiden andern zugehörigen Halbirungs-Linien gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden. Fig. 371.

Auflösung. Die Seite sey BC, die Halbirungs-Linien seyen CH und BK. Man theile die beiden Halbirungs-Linien in drei gleiche Theile und bilde aus BD = ⅔ BK und CD = ⅔ HC über der gegebenen Seite BC das Dreieck BDC und verlängere die Seiten dieses Dreiecks, trage auf sie die ihnen zu-

gehörigen Halbirungs-Linien CH und BK, ziehe durch B und H die Linie BA und durch C und K die Linie CA bis zu ihrem Durchschnitte in A, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Man ziehe HK. In den beiden Dreiecken sind die Winkel HDK und BDC als Scheitelwinkel gleich; ferner ist DC das Doppelte von HD und BD das Doppelte von DK. Die Seiten, welche gleiche Winkel einschließen, stehen also in einer Proportion. Hieraus folgt die Aehnlichkeit der Dreiecke HDK und BDC. Dieß führt zu folgender Proportion

$$BC : HK = DC : HD = 2 : 1$$

und zur Parallelität der Seiten HK und BC.

Geht man nun von diesen Dreiecken auf die Dreiecke AHK und ABC über, so fließt hieraus folgende Proportion

$$AB : AH = BC : HK = 2 : 1$$

also ist AH die Hälfte von AB, folglich AH = HB.

Durch gleiche Schlüsse beweist man auch, daß AK = KC. Die Linien HC und BK halbiren also die Seiten AB und AC, und folglich genügt das Dreieck ABC den Bedingungen der Aufgabe.

§. 317.

Aufgabe. Es ist eine Seite, die ihr zugehörige Halbirungs-Linie und eine von den beiden andern Halbirungs-Linien gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden. Fig. 372.

Auflösung. Die Seite sey BC, die ihr zugehörige Halbirungs-Linie AH, die andere Halbirungs-Linie BK. Man halbire die Seite BC und theile die beiden Halbirungs-Linien in drei gleiche Theile ein, bilde mit der Hälfte BA der gegebenen Seite, dem Drittel der ihr zugehörigen Halbirungs-Linie HD = $\frac{1}{3}$ AH und zwei Drittheilen der zweiten Halbirungs-Linie BD = $\frac{2}{3}$ BK das Dreieck BDH, verlängere beide Seiten

und trage auf sie die ihnen zugehörigen Halbirungs-Linien *HA* und BK, ziehe BA und AKC, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Man ziehe HK. Da BD = $\frac{2}{3}$BK und DH = $\frac{1}{3}$AH ist, so ist AD = $\frac{2}{3}$AH; da ferner ADB und KDH Scheitelwinkel sind, so sind die beiden Dreiecke ABD und DKH ähnlich und HK geht mit AB parallel. Nun ist BC durch den Punkt H in zwei gleiche Theile eingetheilt, also auch AC und es ist AK = KC, folglich steht BK in der Mitte von AC auf. Die drei Punkte A K C liegen in gleicher Linie. Das Dreieck ABC entspricht also den Bedingungen der Aufgabe.

Sechstes Kapitel.

Aufgaben über das Viereck.

A
Aufgaben über das Quadrat.

§. 318.

Aufgabe. Es ist eine Linie gegeben. Man soll daraus ein Quadrat bilden. Fig. 373.

Auflösung. Die Linie sey AB. Man errichte auf den beiden Endpunkten A und B dieser Linie nach §. 8. zwei senkrechte Linien, mache beide, AC und BD, der AB gleich und ziehe CD, so ist ACDB das gesuchte Quadrat.

§. 319.

Aufgabe. Es ist die Diagonale gegeben. Man soll aus ihr ein Quadrat bilden. Fig. 374.

Auflösung. Die Diagonale sey AD. Man errichte in ihrem Mittelpunkte C eine durchschneidende senkrechte Linie BE, mache $CB = CE = AC = \frac{1}{2} AD$ und verbinde die Punkte A, B, D und E durch gerade Linien, so ist ABDE das gesuchte Quadrat.

Der Beweis führt sich leicht, wenn man beachtet, daß durch die angebene Construction vier congruente gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke ACB, BCD, DCE und ACE entstanden sind, wonach also die Linien AB, BD, DE und EA einander gleich sind und zwei anliegende Winkel x und y einen rechten Winkel betragen.

§. 320.

Aufgabe. Es ist die Summe der Diagonale und der Seite gegeben. Man soll daraus ein Quadrat bilden. Fig. 375.

Erste Auflösung. Die Summe der Diagonale und Seite sey AE. Man trage an den einen Endpunkt A einen Winkel $x = \frac{1}{2}R$ und an den andern einen Winkel $y = \frac{1}{4}R$, vollende das Dreieck ABE, fälle von B die unbestimmte Linie BD senkrecht auf AE, mache $AM = MB = MC = MD$ und verbinde ihre Endpunkte durch die Linien AB, BC, CD, DA, so ist ABCD das gesuchte Quadrat.

Beweis. Der Beweis, daß ABCD ein Quadrat sey, fällt mit dem des vorigen § zusammen. Es ist noch zu zeigen, daß $AC + CB = AE$ sey. Dieß zeigt sich aus Folgendem: Der Winkel $v = v' = \frac{1}{2}R$, ferner ist der Winkel

$$v = y + y', \text{ also } y' = v - y$$

Da nun $y = \frac{1}{4}R$ und $v = \frac{1}{2}R$, so ist

$$y' = \frac{1}{2}R - \frac{1}{4}R = \frac{1}{4}R$$

Demnach sind die Winkel y und y' einander gleich, folglich das Dreieck BCE gleichschenklig und also $BC = CE$, also auch

$$AC + BC = AC + CE = AE$$

Zweite Auflösung. Fig. 376. Man trage, wie vorhin, an den einen Endpunkt A den Winkel $x = \frac{1}{2}R$ und an den andern $y = \frac{1}{4}R$ und vollende das Dreieck ABC, mache $BC = AB$ und errichte auf den Endpunkten A und C beider Linien die senkrechten Linien AD und DC, so ist ABCD das gesuchte Quadrat.

Beweis. Nach der Construction ist $AB = BC$, also der Winkel $x = x' = \frac{1}{2}R$ und der Winkel $ABC = R$. Es ist ferner $x' = y + y'$, also $y' = x' - y = \frac{1}{2}R - \frac{1}{4}R = \frac{1}{4}R$. Demnach ist $y = y'$ und das Dreieck BCE gleichschenklig und $BC = CE$, hieraus folgt, daß $AC + BC = AC + CE = AE$ ist. Das Viereck ABCD ist, da die Seiten einander gleich sind und senkrecht aufstehen, ein

Quadrat, und hat die gegebene Summe der Diagonale und Seite.

Dritte Auflösung. Nennt man die Summe der Diagonale S, die Seite x, so ist die Diagonale $S - x$. Wendet man hierauf den pythagoräischen Lehrsatz an, so erhält man folgende Gleichung

$$(S - x)^2 = 2x^2$$

oder

$$S^2 - 2Sx + x^2 = 2x^2$$

$$S^2 = x^2 + 2Sx$$

Wird S^2 zugezählt und die Gleichung aufgelöst, so entsteht für die Seite $x = \sqrt{(2S^2)} - S = S(\sqrt{2} - 1)$

Die Construction dieser Formel ist leicht.

§. 321.

Aufgabe. Es ist der Unterschied der Diagonale und der Seite gegeben. Man soll daraus ein Quadrat bilden. Fig. 377.

Erste Auflösung. Der Unterschied sey AE. An irgend einem Punkte A der Linie AB lege man den Winkel $x = \frac{1}{2}R$, und ziehe den unbestimmten Schenkel AD, schneide auf ihm AE ab, und an den andern Endpunkt E der Linie AE lege man den Winkel $z = \frac{3}{4}R$ so an, daß der eine seiner Schenkel auf die Verlängerte AE falle, ziehe die Linie EB, so ist AB die Seite des Quadrates. Aus ihr läßt sich leicht das Quadrat ACDB bilden, welches das gesuchte ist.

Beweis. Da ACDB ein Quadrat ist, so ist der Winkel $n + z' = R$ und $x = x' = \frac{1}{2}R$.

Da der Winkel $z = \frac{3}{4}R$ ist, so ist

$$z' = 2R - z - x' = 2R - \tfrac{3}{4}R - \tfrac{2}{4}R = \tfrac{3}{4}R$$

Demnach ist also der Winkel $z = z'$ und das Dreieck EDB gleichschenklig, also die Linie ED = BD und somit auch

$$AE = AD - ED = AD - DB$$

Da nun AD die Diagonale ist, und AE der Unterschied

zwischen ihr und der Seite, so folgt, daß ACDB ein Quadrat ist, welches den Bedingungen der Aufgabe genügt.

Zweite Auflösung. Fig. 378. Man construire aus dem Unterschiede AE, als Kathete, ein rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck AEF, ziehe die unbestimmte Linie AB und mache FB = AE, so ist AB die Seite des gesuchten Quadrates, aus ihr läßt sich das Quadrat ABCD leicht bilden.

Beweis. Nach der Construction sind die Dreiecke AFE, FBE und ABC gleichschenklig. Hieraus folgt, daß der Winkel $x' = x = \frac{1}{2}R$ und $x' = x'' = \frac{1}{2}R$ und $z = z'$

ferner ist $x' = z + z' = 2z$

also ist $z = \frac{1}{2}x' = \frac{1}{4}R$

Da nun ABCD ein Quadrat ist, so ist $z + m = R$ und

$$m = R - z = R - \frac{1}{4}R = \frac{3}{4}R$$

ferner ist

$$m' = 2R - m - x'' = 2R - \frac{3}{4}R - \frac{1}{2}R = \frac{3}{4}R$$

Also sind die Winkel m und m' einander gleich und das Dreieck BEC gleichschenklig und die Linie BC = EC.

Nun ist die Linie AE = AC — EC = AC — BC und bildet den Unterschied zwischen der Diagonale und der Seite, also ist das Viereck ABCD ein Quadrat, das den gegebenen Unterschied enthält.

Dritte Auflösung. Fig. 377. Es sey der Unterschied d, die Seite x, so ist die Hypotenuse $x + d$ und hieraus gewinnt man nach dem pythagoräischen Lehrsatze folgende Gleichung

$$(x + d)^2 = 2x^2$$

oder

$$x^2 + 2dx + d^2 = 2x^2$$

$$x^2 - 2dx = d^2$$

Wird d^2 zugezählt und die Gleichung entwickelt, so entsteht für die Seite $x = d + \sqrt{(2d^2)} = d(1 + \sqrt{2})$

Die Construction dieser Formel fällt mit der vorigen Auflösung zusammen.

B

Aufgaben über das Rechteck.

§. 322.

Aufgabe. Es sind die zwei Seiten eines Rechtecks gegeben. Man soll daraus das Rechteck bilden. Fig. 379.

Erste Auflösung. Die eine Seite sey DC, die andere BC. Man errichte auf jedem Endpunkte D und C der einen Seite die andere BC und DA = BC senkrecht, verbinde die Punkte A und B durch die Linie AB, so ist ABCD das gesuchte Viereck.

Zweite Auflösung. Man errichte auf dem einen Endpunkte C der einen Seite DC, die andere BC senkrecht, beschreibe von B aus mit DC und von D aus mit DA = BC zwei sich durchschneidende Kreisbogen, ziehe AD und AB, so ist ABCD das gesuchte Rechteck.

§. 323.

Aufgabe. Es ist die Diagonale und eine Seite gegeben. Man soll daraus ein Rechteck bilden. Fig. 380.

Erste Auflösung. Die Diagonale sey AC, die Seite AD. Man bilde aus der Diagonale AC, als Hypotenuse, und der Seite AD, als Kathete, das rechtwinklige Dreieck ACD nach §. 75. und beschreibe von C aus mit CB = AD, von A aus mit AB = CD zwei sich in dem Punkte B durchschneidende Kreisbogen, ziehe BA und BC, so ist ABCD das gesuchte Rechteck.

Zweite Auflösung. Man halbire die Hypotenuse AC und beschreibe von ihrem Mittelpunkte E aus mit ihrer Hälfte AE = EC einen Kreis, trage von den beiden Endpunkten A und C der Hypotenuse die gegebene Seite AD und

CB = AD, als Sehne, auf beiden Seiten in den Kreis, ziehe BA und CD, so ist ABCD das gesuchte Rechteck.

Beweis. Die Winkel bei B und D sind, als Peripheriewinkel eines Halbkreises, Rechte, die Linie BC = AD. Hieraus folgt, daß auch die Winkel bei A und C Rechte sind, weil sie Winkel eines Vierecks im Kreise sind; ferner: ist, da BA und CD parallel sind, ABCD ein Viereck, das die gegebene Seite und Diagonale hat.

§. 324.

Aufgabe. Es ist die Diagonale und die Summe zweier anliegenden Seiten gegeben. Man soll daraus ein Rechteck bilden. Fig. 381.

Auflösung. Die Diagonale sey AC, die Seitensumme AE. Man lege an den einen Endpunkt E der gegebenen Summe AE den Winkel AEC = $\frac{1}{2}$ R unter unbestimmt langem Schenkel, beschreibe von dem andern Endpunkte A einen Kreisbogen, der diesen Schenkel in C durchschneiden wird, errichte in A eine senkrechte Linie AB und fälle von C auf AB und AE die senkrechten Linien CB und CD, so ist ABCD das gesuchte Rechteck.

Beweis. Da die Linien AB und DC auf AE, AE und BC auf AB senkrecht stehen, so sind die Winkel bei A, B, D rechte, also auch der Winkel bei C ein Rechter und das Viereck ABCD ein Rechteck. Die Linie AC ist der gegebenen Diagonale gleich, ferner ist der Winkel AEC = $\frac{1}{2}$ R, der Winkel bei D ist ein Rechter, also ist der bei C auch $\frac{1}{2}$ R und das Dreieck DEC ein gleichschenkliges Dreieck, also auch die Linie DE = DC, demnach ist AD + DE = AD + DC = AE
und die anliegenden Seiten der gegebenen Linie gleich.

Anmerkung. Da mit AC, als Radius, zwei Durchschnitte möglich sind, so sind zwei Rechtecke ABCD und AB′C′D′ möglich, die aber congruent und nur ihrer Lage nach von einander verschieden sind, was sich leicht erkennen läßt. Ist die Linie AC kleiner, als der senkrechte Abstand des Punktes A von EC′, so ist die Aufgabe unmöglich; ist er diesem gleich, so geht das Viereck in ein Quadrat über, denn es werden alsdann die beiden anliegenden Seiten AD und DC einander gleich werden.

§. 325.

Aufgabe. Es ist die Diagonale und der Unterschied zweier anliegenden Seiten gegeben. Man soll daraus ein Rechteck bilden.

Erste Auflösung. Fig. 382. Die Diagonale sey AC der Unterschied der anliegenden Seiten AE. Man lege an den Endpunkt E des gegebenen Unterschieds und zwar auf seiner Verlängerung ED einen Winkel CED $= \frac{1}{2}$R an und lege von dem andern Endpunkte A die gegebene Diagonale bis zum Durchschnitte C mit der Linie EC an, errichte in dem Mittelpunkte F von EC eine Linie FD senkrecht bis zum Durchschnitte D mit ED und ziehe CD, nun beschreibe man von C aus mit CB = AD und von A mit AB = DC zwei sich in B durchschneidende Kreisbogen, ziehe BC und BA, so ist ABCD das gesuchte Rechteck.

Beweis. Vermöge der Construction sind die Dreiecke EFD und CFD congruent, also die Linien CD und ED einander gleich, also auch

$$AE = AD - ED = AD - CD$$

Aus der Congruenz der Dreiecke EFD und CFD folgt auch die Gleichheit der Winkel x und x'. Da nun $x = \frac{1}{2}R$ ist, so ist auch $x' = \frac{1}{2}R$, folglich der dritte Winkel bei $D = 2R - 2 \cdot \frac{1}{2}R = R$. Da nun die gegenüberstehenden Seiten nach der Construction einander gleich sind, so folgt hieraus, daß sie parallel laufen, daß alle Winkel, da bei D ein Rechter ist, rechte sind, und daß also das Viereck ABCD ein Rechteck ist, welches die aufgestellten Bedingungen erfüllt.

Zweite Auflösung. Fig. 383. Man bilde auf dieselbe Art, wie vorhin, das Dreieck AEC, halbire die Diagonale und beschreibe mit ihrer Hälfte, als Radius, einen Kreis, verlängere AE bis zum Durchschnitte D der Peripherie in D, ziehe CD, trage von C aus die CB = AD, als Sehne, in den Kreis und ziehe BA, so ist ABCD das gesuchte Rechteck.

Der **Beweis** führt sich leicht.

Dritte Auflösung. Fig. 384. Der Unterschied sey EC. Man bilde aus dem Unterschiede EC, dem Winkel AEC $= \frac{1}{2}R$ und der Diagonale, als gegenüberstehender Seite, das stumpfwinklige Dreieck AEC, verlängere EC und fälle von A auf die Verlängerung von EC die senkrechte Linie AD, mache BC = AD und AB = CD, so ist ABCD das gesuchte Rechteck; oder man beschreibe über AC, als Durchmesser, den Kreis ABCD, verlängere EC bis zum Durchschnitte D des Kreises, ziehe AD, mache BC = AD und ziehe AB, so ist ABCD das gesuchte Rechteck.

Beweis. Da der Winkel ADE = R und AEC $= \frac{1}{2}R$, so ist der Winkel EAD $= 2R - R - \frac{1}{2}R = \frac{1}{2}R$, also das Dreieck ADE gleichschenklig und AD = DE. Hieraus folgt, daß CD = DE — DC = AD — DC.

Das Viereck ABCD hat die gegenüberstehenden Seiten gleich und einen rechten Winkel bei D, also ist es ein Rechteck und erfüllt die Bedingungen der Aufgabe.

Anmerkung. 1) Jede der gegebenen Auflösungen läßt noch eine zweite zu, wenn man das rechtwinklige Dreieck ACD construirt und durch den Mittelpunkt M, der Diagonale AC, die ihr gleiche Linie DB legt. Diese Construction beruht auf dem Satze, daß die zwei Diagonalen eines Rechtecks einander gleich sind und sich in ihrer Mitte durchschneiden.

2) Die Möglichkeit der Aufgabe beruht auf der Construction des Dreiecks AEC. Da dieses nach den Bemerkungen des §. 233. bestimmt ist, so ist die Aufgabe selbst bestimmt.

Vierte Auflösung. Nennt man die kleinere Seite x, den Unterschied D, die Diagonale H, so hat man nach dem pythagoräischen Lehrsatze folgende Gleichung

$$(x + D)^2 + x^2 = H^2$$

oder

$$x^2 + 2Dx + D^2 + x^2 = H^2$$

Es ist also

$$x^2 + Dx = \frac{1}{2}(H^2 - D^2)$$

und hieraus die kleinere Seite

$$x = \sqrt{\frac{1}{2}H^2 - \frac{1}{2}D^2 + \frac{1}{4}D^2} - \frac{1}{2}D$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}H^2 - \frac{1}{4}D^2} - \frac{1}{2}D$$

die größere aber

$$x + D = \sqrt{\frac{1}{2}H^2 - \frac{1}{4}D^2} + \frac{1}{2}D$$

Die Construction eines Rechtecks nach dieser Formel ergibt sich nach den Lehren des zweiten Kapitels leicht.

§. 326.

Aufgabe. Es ist eine Seite und die Summe der Diagonale und der andern Seite gegeben. Man soll daraus ein Rechteck bilden. Fig. 385.

Erste Auflösung. Die Seite sey AD, die Summe der Diagonale und andern Seite DE. Man bilde aus der Seite AD und der Summe DE das rechtwinklige Dreieck AED, halbire die Hypotenuse AE durch eine senkrechte Linie FC bis zum Durchschnitte C mit der Summen-Linie DE. Nun errichte man in A eine senkrechte unbestimmte Linie und fälle auf diese von C eine senkrechte Linie CB, so ist ABCD das gesuchte Rechteck.

Beweis. Vermöge der Construction sind die Dreiecke AFC und CFE congruent, also die Linien EC und AC gleich, und folglich auch

$$AC + CD = EC + CD = ED$$

also die Summe der Diagonale und einen Seite der gegebenen Linie gleich; ferner ist AD die gegebene Seite und die Winkel bei D, A, B sind rechte, also auch der sind bei C ein Rechter und folglich ABCD ein Rechteck, das die aufgestellten Bedingungen erfüllt.

Anmerkung. Ist das rechtwinklige Dreiecke ACD construirt, so läßt sich auch durch Umschreiben eines Kreises um AC, als Durchmesser, oder dadurch, daß man von D aus durch den Mittelpunkt der Diagonale AC die Diagonale selbst legt, das gesuchte Rechteck bilden.

Zweite Auflösung. Nennt man die eine Seite K, die Summe der Diagonale und der andern Seite S, die andere Seite x, so ist die Diagonale S — x und man hat nach dem pythagoräischen Lehrsatze folgende Gleichung

$$(S - x)^2 = x^2 + K^2$$

und hieraus $S^2 - 2Sx + x^2 = x + K^2$

oder $2Sx = S^2 - K^2$

Die eine Seite ist also

$$x = \frac{S^2 - K^2}{2S}$$

die Diagonale

$$S - x = S - \frac{S^2 - K^2}{2S}$$

$$= \frac{S^2 + K^2}{2S}$$

Aus diesen Linien läßt sich leicht das Rechteck bilden. Die obige Auflösung ist die kürzeste Construction dieser Gleichung.

§. 327.

Aufgabe. Es ist die eine Seite und der Unterschied der Diagonale und andern Seite gegeben. Man soll daraus ein Rechteck bilden. Fig. 386.

Erste Auflösung. Die eine Seite sey AD, der Unterschied zwischen der andern und der Diagonale sey DE. Man bilde aus beiden Linien, als Katheten, das rechtwinklige Dreieck ADE, halbire die Hypotenuse AE durch eine Senkrechte FE, verlängere die Unterschiedslinie ED bis zum Durchschnitte C mit der Linie FC und ziehe darauf AC; nun beschreibe man aus C mit CB = AD und aus A mit AB = CD zwei sich in dem Punkte B durchschneidende Kreisbogen und ziehe AB und BC, so ist ABCD das gesuchte Rechteck.

Beweis. Vermöge der Construction sind die beiden Dreiecke ACF und CFE congruent, also die Linien AC und CE einander gleich. Hieraus folgt, daß

$$DE = EC - CD = AC - CD$$

Da nun AC die Diagonale in dem Rechtecke ABCD ist, so ist auch die Diagonale um den gegebenen Unterschied DE größer, als die Seite CD. Die Linie BC = AD; AB = CD und der Winkel bei D ist ein Rechter, also ist das Viereck ABCD ein Parallelogramm, das vier rechte Winkel hat, also ein Rechteck.

Zweite Auflösung. Man bilde, wie vorhin, das rechtwinklige Dreieck ACD, beschreibe über seiner Hypotenuse AC, als Durchmesser, einen Kreis ABCD und trage CB = AD und AB = CD von C und A aus, als Sehnen, in den Kreis, so ist ABCD das gesuchte Viereck.

Zweite Auflösung. Nennt man den gegebenen Unterschied D, die gegebene Seite K, die andere Seite x, so ist die Diagonale $x + D$ und vermöge des pythagoräischen Lehrsatzes ist $(x + D)^2 = x^2 + K^2$
oder $x^2 + 2Dx + D^2 = x^2 + K^2$
und hieraus die gesuchte Seite

$$x = \frac{K^2 - D^2}{2D}$$

die Diagonale

$$x + D = \frac{K^2 - D^2}{2D} + D$$
$$= \frac{K^2 + D^2}{2D}$$

Die obigen Auflösungen sind die einfachsten Constructionen für diese Formeln.

§. 328.

Aufgabe. Es ist die kleinere Seite und der Unterschied der an der Diagonale liegenden Winkel gegeben. Man soll daraus ein Rechteck bilden. Fig. 386. b

Auflösung. Der Winkelunterschied sey x, die Seite CD. Man bilde aus beiden das rechtwinklige Dreieck CED, verlängere DE und mache EA = EC, ziehe AC, beschreibe über AC einen Kreis und trage CB = AD als Sehne in den Kreis, ziehe BA, so ist ABCD das gesuchte Rechteck.

Beweis. Vermöge der Construction ist der Winkel ECD dem gegebenen Unterschiedswinkel gleich; ferner die Linie EC = EA, also ACE ein gleichschenkliges Dreieck und der Winkel $m' = m$. Hieraus folgt, daß der Winkel

$x = ACD - m = ACD - CAD$ ist.

Das Rechteck ABCD hat ferner die Seite CD und entspricht also den Bedingungen der Aufgabe.

Anmerkung. Soll ein Rechteck gebildet werden, wenn die größere Seite AD, der Unterschied x, der an der Diagonale liegenden Winkel, gegeben ist, so hat man aus AD, einem rechten Winkel und einem Winkel $q = \frac{1}{2}(R - x)$ ein rechtwinkliges Dreieck zu bilden, und wie vorhin zu verfahren.

§. 329.

Aufgabe. Es ist die Summe der zwei Seiten und der Diagonale und ein dieser anliegender Winkel gegeben. Man soll daraus ein Rechteck bilden. Fig. 387.

Auflösung. Die gegebene Summenlinie sey HE und der Winkel x. Man lege an den einen Endpunkt E der Linie HE den Winkel $AED = \frac{1}{2} x$ und an den andern $AHB = \frac{1}{2}(R - x)$ verlängere beide Schenkel bis zum Durchschnitte in A, halbire die beiden Linien HA und AE durch die senkrechten Linien GB und FD, ziehe BA und AD und beschreibe von B aus mit BC = AD und von D aus mit DC = AB zwei sich in C durchschneidende Kreisbogen, ziehe BC und CD, so ist ABCD das gesuchte Rechteck.

Beweis. Die beiden Dreiecke HBG und ABG sind congruent, also sind die Linien HB und BA einander gleich, das gleiche gilt von den Linien AD und DE, also ist

$$AB + BD + AD = HB + BD + DE = HE$$

Da der Winkel $AED = DAE = \frac{1}{2} x$ ist, so ist der Winkel

$$BDA = AED + DAE = x$$

also der, an der Diagonale liegende, Winkel dem gegebenen gleich. Aus dem nämlichen Grunde ist der Winkel

$$ABD = BHA + HAB = R - x$$

Da nun der Winkel $ABD + ADB = x + R - x = R$ ist, so ist der dritte Winkel im Dreiecke BAD gleichfalls ein Rechter. Da nun die Linie BC = AD und CD = BA ist, so ist das Viereck ABCD ein Rechteck, das die aufgestellten Bedingungen erfüllt.

§. 330.

Aufgabe. Es ist der Unterschied zwischen der Summe der zwei Seiten und der Diagonale, und ein an der Diagonale liegender Winkel gegeben. Man soll daraus ein Rechteck bilden. Fig. 388.

Auflösung. Der Unterschied sey EF, der Winkel x. Man bilde aus dem gegebenen Unterschied, einem Winkel EFD $= \frac{1}{2}R$ und den Winkel FED $= R + \frac{1}{2}x$ ein Dreieck, verlängere den Unterschied FE, errichte in dem Mittelpunkte G der Linie ED eine senkrechte Linie GB bis zum Durchschnitte B der Verlängerung von FE, ziehe BD und beschreibe um BD, als Durchmesser, einen Kreis, ziehe von dem Durchschnitte A auf D die Linie AD und lege BC = AD, als Sehne, in den Kreis, ziehe CD, so ist ABCD das gesuchte Rechteck.

Beweis. Nach der Construction sind die Dreiecke EGB und BGD congruent, also die Linien BE und BD gleich und das Dreieck EBD gleichschenklig; hieraus folgt, daß

1) $EF = FB - EB = BF - BD$ ist.

Da BD der Durchmesser des Kreises und der Winkel BAD ein Peripheriewinkel ist, dessen Schenkel AB und AD auf den Endpunkten des Durchmessers aufstehen, so ist er ein Rechter, und also auch sein Nebenwinkel DAF ein rechter Winkel. Da ferner der Winkel $m = \frac{1}{2}R$, so ist der dritte Winkel ADF im Dreiecke ADF die Hälfte eines Rechten und also das Dreieck FAD ein gleichschenkliges Dreieck, worin die Linien AF und AD einander gleich sind. Aus diesen Bemerkungen folgt, daß

2) $BA + AD = BA + AF = BF$ ist,

also ist 3) $EF = BF - BD = BA + AD - BD$

Da das Dreieck BED gleichschenklich ist, so ist der Winkel $p = q$. Jeder von beiden ist der Ergänzungswinkel zu zwei Rechten zu dem Winkel n, also ist

$$p = q = 2R - (R + \tfrac{1}{2}x) = R - \tfrac{1}{2}x$$

Aus zwei Winkeln bestimmt sich der dritte, und es ist

$$EBD = 2R - q - p = 2R - (2R - 2 \cdot \tfrac{1}{2}x) = x$$

Das Viereck erfüllt die Bedingungen der Aufgabe

§. 331.

Aufgabe. Es ist die eine Seite und der Inhalt eines Rechtecks gegeben. Man soll daraus ein Rechteck bilden. Fig. 389.

Erste Auflösung. Es sey EB die gegebene Seite und BF die Seite des als Inhalt dargestellten Quadrates. Man bilde aus EB und BF, als Katheten, ein rechtwinkliges Dreieck EBF, errichte auf dem Endpunkte F der Hypotenuse EF eine senkrechte Linie und verlängere EB bis zum Durchschnitte BC der Senkrechten FC, so sind EB und BC die Seiten des gesuchten Rechtecks. Aus ihnen läßt sich nun leicht das Rechteck ABCD bilden.

Beweis. Da die Linie BF die Seite des als Quadrat dargestellten Rechtecks ist und der Inhalt eines Rechtecks dem Produkte aus den beiden Seiten eines Rechtecks ist, so erhält man, wenn die unbekannte Seite x genannt wird

$$x \,.\, EB = BF^2$$

und hieraus erhält man folgende Proportion

$$EB : BF = BF : x$$

Sucht man daher zu der Seite und der Quadrat-Linie die dritte Proportional-Linie, so wird diese die zweite Seite des Rechtecks seyn. Nun ist wegen des rechten Winkels EFC und der auf der Hypotenuse senkrecht stehenden Linie BF

$$EB : BF = BF : BC$$

Wird also aus BC und EB ein Rechteck gebildet, so erhält man das gesuchte Rechteck ABCD

Zweite Auflösung. Nennt man die eine Seite K, den Inhalt P^2, die gesuchte Seite x, so hat man folgende Gleichung

$$K \,.\, x = P^2$$

und

$$x = \frac{P^2}{K}$$

Die obige Auflösung ist die kürzeste Construction dieser Formel.

§. 332.

Aufgabe. Es ist die Summe der beiden Seiten und

der Inhalt eines Rechtecks gegeben. Man soll daraus ein Rechteck bilden. Fig. 390.

Erste Auflösung. Die Seite des als Quadrat dargestellten Inhalts sey HK und die Summe der beiden Seiten sey HC. Man beschreibe über HC einen Halbkreis HGC, errichte die Linie HK auf dem Endpunkte H senkrecht und ziehe durch ihren Endpunkt K eine Linie KG parallel mit HC bis zum Durchschnitte G des Halbkreises. Von dem Durchschnittspunkte G fälle man eine Durchschnitts-Linie senkrecht auf HC, mache BA = BH und vollende das Rechteck ABCD, so ist es das gesuchte.

Beweis. Da die gegebene Quadratseite BG die mittlere Proportionale zwischen den beiden Seiten des Rechtecks ist, so wurde BG so gezogen, daß sie die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten der gegebenen Summe HC ist, die Linie BA = BH, also ist $AB + BC = HB + BC = HC$. Ferner ist $BG^2 = HB^2 . BC = AB . BC$, also erfüllt das Rechteck ABCD die aufgestellten Bedingungen.

Zweite Auflösung. Nennt man den Inhalt P^2, die Summe der beiden Seiten S, die eine Seite x, so ist

$$(S - x)\, x = P^2$$

oder

$$x^2 - Sx = - P^2$$

Wird auf beiden Seiten $(\frac{1}{2}S)^2$ zugezählt und die Gleichung entwickelt, so entsteht

$$x = \tfrac{1}{2}S \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}S^2 - P^2}$$

Es ist ohne weitere Erörterung klar, daß das positive zur größern und das negative zur kleinern Seite führe, und es ist

$$K = \tfrac{1}{2}S + \sqrt{(\tfrac{1}{4}S^2 - P^2)}$$

also

$$K = \tfrac{1}{2}S - \sqrt{(\tfrac{1}{4}S^2 - P^2)}$$

Die erste Auflösung ist die einfachste Construction dieser Formel.

Anmerkung. Ist der Flächeninhalt und der Umfang eines Rechtecks gegeben, so wird die Aufgabe sich leicht lösen lassen, wenn man bedenkt, daß der Umfang eines Rechtecks der doppelten Summe zweier Seiten gleich ist.

§. 333.

Aufgabe. Es, ist der Unterschied der beiden Seiten

und der Flächeninhalt eines Rechtecks gegeben. Man soll daraus ein Rechteck bilden. Fig. 391.

Erste Auflösung. Der gegebene Unterschied sey BE, die Quadratlinie des als Quadrat dargestellten Flächeninhalts sey BG. Man halbire den gegebenen Unterschied und bilde aus seiner Hälfte BM und der Quadratlinie BG, als Katheten, das rechtwinklige Dreieck BGM, beschreibe von M mit MG, als Radius, einen Halbkreis HGC, verlängere BE bis zu den Durchschnitten in C und H und auch GB, mache BA = HB und vollende aus BC und BA das Rechteck ABCD, so ist es das gesuchte Rechteck.

Beweis. Die Linie BM = ME, eben so ist MH = MC, also ist $HB = HM - BM$
und $EC = MC - ME$
also ist auch HB = EC. Da nun
$$BE = BC - EC$$
ist, so ist, auch da HB = EC ist,
$$BE = BC - HB$$
Nun ist BA = HB, also ist auch
$$BE = BC - BA$$
d. h. die beiden Seiten BC und AB sind um den gegebenen Unterschied BE von einander verschieden.

Nach der Construction ist ferner
$$BG^2 = HB \cdot BC$$
da aber HB = BA ist, so ist auch
$$BG^2 = BA \cdot BC$$
Da endlich ABCD nach der Construction ein Rechteck ist, so folgt hieraus, daß das Rechteck ABCD die aufgestellten Bedingungen erfüllt.

Zweite Auflösung. Nennt man den Inhalt des Rechtecks P^2, den Unterschied der Seiten D, die kleinere Seite x, so ist die größere $x + D$, und hieraus hat man folgende Gleichung $P^2 = x(x + D) = x^2 + x \cdot D$
Wird auf beiden Seiten $\frac{1}{4}D^2$ zugezählt, so gewinnt man die Formel zur Bestimmung der kleinern Seite
$$1) \quad x = \sqrt{(P^2 + \tfrac{1}{4}D^2)} - \tfrac{1}{2}D$$

Der größern Seite aber

$$2)\quad x + D = \tfrac{1}{2}D + \sqrt{(P^2 + \tfrac{1}{4}D^2)}$$

die erste Auflösung gibt die einfachste Construction dieser Formel.

§. 334.

Aufgabe. Es ist der als Quadrat dargestellte Flächeninhalt eines Rechtecks und die Diagonale gegeben. Man soll daraus ein Rechteck bilden. Fig. 392.

Auflösung. Der Flächeninhalt sey P^2, die Diagonale sey Q. Nennt man die eine Seite x und die andere y, so hat man vermöge des pythagoräischen Lehrsatzes folgende Gleichung

$$1)\quad Q^2 - x^2 = y^2$$

vermöge des Flächeninhalts aber

$$2)\quad x \cdot y = P^2$$

Wird aus beiden Gleichungen die Seite y ausgestoßen, so erhält man durch die Vereinigung beider Gleichungen

$$\sqrt{(Q^2 - x^2)} = \frac{P^2}{x}$$

Wird diese Gleichung ins Quadrat erhoben, so entsteht

$$Q^2 - x^2 = \frac{P^4}{x^2}$$

oder

$$x^4 - Q^2 x^2 = - P^4$$

Wird auf beiden Seiten $\frac{1}{4}Q^4$ zugezählt, so entsteht

$$(x^2 - \tfrac{1}{2}Q^2)^2 = \tfrac{1}{4}Q^4 - P^4$$

oder

$$x^2 - \tfrac{1}{2}Q^2 = \sqrt{(\tfrac{1}{4}Q^4 - P^4)}$$

und hieraus

$$x = \sqrt{(\tfrac{1}{2}Q^2 \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}Q^4 - P^4})}$$

Da vor dem zweiten Wurzelzeichen das bejahte oder verneinte Zeichen stehen kann, so läßt sich leicht erkennen, daß das bejahte Zeichen für die größere Seite und das verneinte für die kleinere gilt, und es ist also die größere

$$K = \sqrt{[\tfrac{1}{2}Q^2 + \sqrt{(\tfrac{1}{4}Q^4 - P^4)}]} =$$
$$= \sqrt{[\tfrac{1}{2}Q^2 + \sqrt{(\tfrac{1}{2}Q^2 - P^2)(\tfrac{1}{2}Q^2 + P^2)}]}$$

die kleinere

$$k = \sqrt{[\tfrac{1}{2}Q^2 - \sqrt{(\tfrac{1}{4}Q^4 - P^4)}]} =$$
$$= \sqrt{[\tfrac{1}{2}Q^2 - \sqrt{(\tfrac{1}{2}Q^2 - P^2)(\tfrac{1}{2}Q^2 + P^2)}]}$$

Construction. Es sey die Diagonale Q = A'B', die Seite des Inhaltsquadrates P = B'E'. Man bilde aus DB = BK = $\frac{1}{2}$A'B' ein rechtwinkliges Dreieck und ziehe DK, trage auf der Linie BK die Linie BE = B'E' an und beschreibe von E aus mit der Linie DK = EC einen Kreisbogen, welcher DB in C durchschneidet; ferner trage man auf die Verlängerung von DB die Linie BF = DK und ziehe EF; diese Linie trage man von B aus auf die Verlängerte DB so, daß BG = EF wird, nun beschreibe man über der Linie CG einen Halbkreis, der die senkrechte Linie BK in S durchschneidet, so ist SF die größere Seite, und wenn man von S aus mit DK = SA einen Bogen beschreibt, der die Linie DB in A durchschneidet, AB die kleinere Seite. Mit beiden Linien läßt sich leicht das Rechteck ABRF beschreiben.

C
Aufgaben über den Rhombus.

---

§. 335.

Aufgabe. Es ist die Diagonale und eine Seite gegeben. Man soll daraus einen Rhombus bilden. Fig. 393.

Auflösung. Die Diagonale sey A'C', die Seite sey A'B'. Man beschreibe auf beiden Seiten der Diagonale AC = A'C' mit der Seite A'B' die gleichschenkligen Dreiecke ABC und ADC, so ist ABCD das gesuchte Rhombus, denn die Diagonale AC des Vierecks ABCD ist der gegebenen Linie A'C' und seine vier Seiten AB, BC, CD, AD sind sich und der Linie AB gleich.

Anmerkung. Die Aufgabe ist nur möglich, so lange die gegebene Seite größer, als die Hälfte der Diagonale ist; sie ist unmöglich, wenn sie eben so groß, oder kleiner, als jene ist.

§. 336.

Aufgabe. Es ist die Diagonale und der Winkel durch dessen Spitze sie geht, gegeben. Man soll daraus einen Rhombus bilden. Fig. 394.

Auflösung. Der Winkel sey x, die Diaganole A'C'. Man halbire den gegebenen Winkel x = BAD und trage auf seine Halbirungslinie die gegebene Diagonale AC = A'C', halbire sie und errichte in ihrem Mittelpunkte E eine Linie BED senkrecht, daß sie gehörig verlängert, die beiden Schenkel des Winkels durchschneide, und verbinde ihre Durchschnittspunkte B und D mit dem Endpunkte C der Diagonale AC, ziehe BC und DC, so ist ABCD der gesuchte Rhombus.

Beweis. Nach der Construction sind die beiden Dreiecke ABE und AED, weil sie die Linie AE gemeinschaftlich und die ihr anliegende Winkel gleich haben, congruent. Es ist also

die Linie BE = ED, hieraus folgert sich nun leicht die Congruenz der zwei Dreiecke BEC und DEC unter sich und mit den Dreiecken ABE und AED und hieraus die Gleichheit der Seiten AB, BC, CD, DA. Das Viereck ABCD ist also ein Rhombus und hat den gegebenen Winkel und die gegebene Diagonale.

§. 337.

Aufgabe. Es ist die Diagonale und der ihr gegenüberstehende Winkel gegeben. Man soll daraus einen Rhombus bilden. Fig. 395.

Auflösung. Die Diagonale sey A'C', der Winkel y. Man beschreibe über und unter der Linie AC = A'C' einen Kreisbogen ABC und ADC, errichte in der Mitte der Diagonale E eine Senkrechte bis zum Durchschnitte der beiden Kreisbögen in B und D, ziehe AB, BC, CD, DA, so ist ABCD der gesuchte Rhombus.

Anmerkung. Eine andere Auflösung findet man, wenn man den Winkel BAD = 2 R — y bestimmt und dann nach dem vorhergehenden § verfährt.

§. 338.

Aufgabe. Es ist die Summe der Diagonale und Seite und der Winkel, durch dessen Spitze die Diagonale geht, gegeben. Man soll daraus einen Rhombus bilden. Fig. 396.

Auflösung. Der Winkel sey x, die Summe der Diagonale und Seite A'E'. Man halbire den Winkel x = BAD und trage auf die Halbirungslinie die gegebene Summenlinie AE = A'E', lege an den andern Endpunkt E den Winkel AEB = $\frac{1}{4}$x, verlängere seinen Schenkel EB bis zum Durchschnitte B mit dem Schenkel AB, halbire die Linie BE und errichte in ihrem Mittelpunkte F eine Linie FC senkrecht bis zum Durchschnitte in C, ziehe BC, beschreibe von C aus mit BC als Radius einen Bogen, welcher den andern Schenkel AD in D durchschneidet und ziehe DC, so ist das Viereck ABCD der gesuchte Rhombus.

Beweis. Der Winkel BAC $= \frac{1}{2}x$ und BEA $= \frac{1}{4}x$. Nach der Construction sind die beiden Dreiecke BFC und FCE congruent, also die Linien BC und CE einander gleich, folglich das Dreieck BEC gleichschenklig und die Winkel z und z' einander gleich, also auch $z = z' = \frac{1}{4}x$ ferner ist der Winkel $y = z + z' = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x = \frac{1}{2}x$. Da nun der Winkel ABC auch die Hälfte von x ist, so sind die Winkel BAC und y einander gleich und das Dreieck ABC gleichschenklig und die Linie BC = AB. Der Winkel $y = y'$, denn jeder ist die Hälfte von x; beide aber sind Wechselwinkel, also gehen die Linien AD und BC parallel.

Nun sind zugleich die drei Linien AB, BC, CD gleich; dieß ist aber nur möglich, wenn sie alle vier einander gleich sind. Hieraus folgt also, daß das Viereck ABCD ein Rhombus sey.

Da BC = CE ist, so ist auch

$$AC + CB = AC + CE = AE$$

ferner ist der Winkel BAC $= x$. Demnach erfüllt also der Rhombus ABCD die Bedingungen der Aufgabe.

Anmerkung. Eine andere Auflösung gewinnt man, wenn nach vollendetem Dreiecke ABC durch C die Linie CD mit AB parallel gezogen wird. Soll ein Rhombus gebildet werden, wenn die Summe der Seite und Diagonale und der letzterer gegenüberstehende Winkel gegeben wird, so löst sich die Aufgabe leicht.

§. 339.

Aufgabe. Es ist der Unterschied zwischen der Diagonale und Seite und der Winkel, durch dessen Spitze die Diagonale geht, gegeben. Man soll daraus einen Rhombus bilden. Fig. 397.

Auflösung. Der Winkel sey x, der Unterschied A'E'. Man halbire den gegebenen Winkel und trage auf seine Halbirungslinie den Unterschied AE = A'E' und an E den Winkel AEB $= R + \frac{1}{4}x$, vollende das Dreieck ABE, errichte in dem Mittelpunkte F der Linie BE eine Senkrechte bis zum Durchschnitte C mit der Halbirungslinie, ziehe BC und mache CD = BC, so ist ABCD der gesuchte Rhombus.

Beweis. Der Winkel BAD, durch dessen Spitze die Diagonale AC geht, ist dem gegebenen Winkel x gleich. Die Dreiecke BFC und EFC sind congruent, also ist die Linie BC = EC, folglich ist

$$AE = AC - EC = AC - BC$$

und AE dem gegebenen Unterschiede der Diagonale und Seite gleich.

Da BC = EC ist, so ist das Dreieck BEC gleichschenklig und z = z'. Es ist aber $z = 2R - (R + \frac{1}{2}x) = R - \frac{1}{4}x$, folglich ist der Winkel

$$BCE = 2R - (z + z') = 2R - 2(R - \tfrac{1}{4}x) = \tfrac{1}{2}x$$

also sind die Winkel BAC und BCA gleich, also auch AB = BC, der Winkel y = BCA, denn beide sind der Hälfte von x gleich, also gehen die Linien BC und AD parallel. Diese Bemerkung in Verbindung mit dem Vorigen führt zu der Gewißheit, daß alle Seiten der Figur ABCD einander gleich sind und daß also ABCD ein Rhombus ist, der den Bedingungen der Aufgabe genügt.

Anmerkung. Soll ein Rhombus aus dem Unterschied der Seite und Diagonale und dem letzterer gegenüberstehenden Winkel gebildet werden, so löst sich diese Aufgabe leicht.

§. 340.

Aufgabe. Es sind die beiden Diagonalen gegeben. Man soll daraus einen Rhombus bilden. Fig. 398.

Erste Auflösung. Die beiden Diagonalen seyen AC und BD. Man halbire beide und setze beide in ihrem Mittelpunkte E senkrecht aufeinander, verbinde ihre Endpunkee A, B, C, D durch gerade Linien, so ist ABCD der gesuchte Rhombus.

Beweis. Die beiden Dreiecke ABE und EBC sind nach der Construction congruent, denn zwei Linien und der eingeschlossene Winkel sind in beiden gleich, also ist AB = BC, aus dem nämlichen Grunde sind die Dreiecke BEC und ECD congruent, also ist BC = CD, auf gleiche Weise zeigt man, daß die Dreiecke CED, AED und AED, AEB congruent sind. Demnach sind also die Linien AB, BC, CD, DA gleich und ABCD ist ein Rhombus, der die beiden Diagonalen enthält.

Zweite Auflösung. Nennt man die größere Diagonale Q, die kleinere q, und berücksichtigt man, daß beide Diagonalen des Rhombus in ihrer Mitte senkrecht auf einander stehen und vier congruente rechtwinklige Dreiecke bilden, deren Katheten die Hälften der beiden Diagonalen sind, und nennt man die Seite des Rhombus x, so hat man nach dem pythagoräischen Lehrsatze zwischen der Seite und den Diagonalen folgende Gleichung

$$x = \sqrt{\tfrac{1}{4}Q^2 + \tfrac{1}{4}q^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{Q^2 + q^2}$$

Die erste Auflösung ist die einfachste Construction für diese Formel.

§. 341.

Aufgabe. Es ist der Unterschied der beiden Diagonalen und eine Seite gegeben. Man soll daraus einen Rhombus bilden. Fig. 399.

Erste Auflösung. Die Seite sey B′C′, der Unterschied C′K′. Man halbire einen rechten Winkel BED und verlängere die Halbirungslinie durch seine Spitze E auf beiden Seiten unbestimmt, trage die Hälfte des gegebenen Unterschiedes EC = ½ C′K′ und darauf von C aus die Linie CB = C′B′ auf beiden Seiten so an, daß sie die Schenkel EB und ED in den Punkten B und D treffe, ziehe BC und DC, mache BA = BC und ziehe AD, so ist ABCD der gesuchte Rhombus.

Beweis. Man ziehe BD. Nach der Construction sind die Dreiecke BCE und DEC congruent, also der Winkel m = n. Setzt man zu EC das Stück FE, so entstehen die Dreiecke BFC und FCD, die wegen der Winkel m und n und den ihn umschließenden gleichen Seiten, auch congruent sind, also sind auch die Linien BF und FD gleich und die Winkel r und r′ rechte. Hieraus folgt ferner, daß die Linien BD und AC senkrecht auf einander stehen. Da AB = BC und BF = BF ist und die Dreiecke ABF und BFC rechtwinklig sind, so sind auch diese congruent. Die Gleichheit der Seiten AF = AF, BF = FD und der Winkel bei F führt zur Congruenz der beiden Dreiecke ABF und

AFD. Demnach sind alle vier Seiten AB, BC, CD und DA gleich und ABCD ein Rhombus. FC ist die Hälfte der Diagonale AC; FD die Hälfte der Diagonale BD. Da endlich der Winkel $r = R$ und $x = \frac{1}{2} R$, so ist auch $z' = \frac{1}{2} R$ und folglich $FE = FD$, demnach ist auch

$$EC = FC - FE = FC - FD$$

wird diese Gleichung verdoppelt, so ist

$$2 \cdot EC = 2 (FC - FE) = 2 (FC - FD)$$
$$= AC - 2 FE = AC - BD$$

Die Linie EC ist dem halben Unterschied gleich, also ist ihr Doppeltes dem ganzen Unterschiede gleich und der Rhombus erfüllt die Bedingungen der Aufgabe.

Zweite Auflösung. Nennt man die Seite K, den Unterschied der beiden Diagonalen D, die kleinere Diagonale x, so ist die größere $x + D$ und man hat, da die Seite und die Hälften der beiden Diagonalen ein rechtwinkliges Dreieck bilden, folgende Gleichung

$$K^2 = \tfrac{1}{4} x^2 + \tfrac{1}{4} (x + D)^2$$

oder $$4 K^2 = 2 x^2 + 2 x D + D^2$$

und hieraus $$2 K^2 - \tfrac{1}{2} D^2 = x^2 + D x$$

Wird $(\frac{1}{2} D)^2$ auf beiden Seiten zugezählt, so entsteht

$$2 K^2 - \tfrac{1}{2} D^2 + \tfrac{1}{4} D^2 = (x + \tfrac{1}{2} D)^2$$

die kleinere Diagonale bestimmt sich daher durch folgende Gleichung $$x = \sqrt{2 K^2 - \tfrac{1}{4} D^2} - \tfrac{1}{2} D$$

die größere durch folgende

$$Q = x + D = \tfrac{1}{2} D + \sqrt{2 K^2 - \tfrac{1}{4} D^2}$$

§. 342.

Aufgabe. Es ist der Unterschied der beiden Diagonalen und der Winkel, durch dessen Spitze die größere Diagonale geht, gegeben. Man soll daraus einen Rhombus bilden. Fig. 399.

Auflösung. Der Unterschied sey CK, der Winkel x. Man halbire den gegebenen Winkel $BCD = x$ und trage auf die Halbirungslinie die Hälfte des gegebenen Unterschieds $CE = \frac{1}{2} CK$, trage an den Punkt E auf seiner Verlängerung den

Winkel AEB = $\frac{1}{2}$ R und ziehe seinen Schenkel bis zum Durchschnitte B mit CB; nun mache man BA = BC und CD = BC und ziehe AD, so ist ABCD der gesuchte Rhombus.

Der Beweis führt sich auf die nämliche Art, wie im vorigen §.

Anmerkung. Hiernach löst sich die Aufgabe leicht, wenn der Unterschied der beiden Diagonalen und der Winkel, durch dessen Spitze die kleinere Diagonale geht, gegeben sind.

§. 343.

Aufgabe. Es ist die Summe der beiden Diagonalen und eine Seite gegeben. Man soll daraus einen Rhombus bilden. Fig. 399.

Erste Auflösung. Die Seite sey AB, die Summe AK. Man halbire einen rechten Winkel BED und trage auf seine Halbirungslinie die Hälfte der gegebenen Summe AE = $\frac{1}{2}$ AK, trage ferner von A aus die Seite AB = AD so an, daß ihre Endpunkte in die Schenkel EB und ED fallen und bei B und D stumpfe Winkel bilden. Nun verlängere man AE nach C zu, trage BC = AB an und ziehe DC, so ist ABCD der gesuchte Rhombus.

Beweis. Man ziehe BD. Nach der Construction sind die Dreiecke ABE und AED congruent, also die Linien BE und ED und die Winkel p und q einander gleich. Aus der Gleichheit der Seiten AB und AF, AD und AF und der von ihnen eingeschlossenen Winkel folgt die Congruenz der Dreiecke ABF und ADF, der Linien BF und FD und der Winkel BFA und DFA, welche zugleich Rechte sind. Hieraus folgt, daß die Linien AE und BD senkrecht auf einander stehen, und daß die vier Winkel bei F rechte sind, da AB = BC und BF = BF, so folgt, daß die rechtwinkligen Dreiecke ABF und BFC congruent sind und daß AF = FC ist. Da endlich BC = DC und FC = FC, so sind auch die Dreiecke BCF und FDC congruent. Hieraus folgt die Gleichheit aller vier Seiten AB, BC, CD, DA. Demnach ist ABCD ein Rhombus, der die gegebene Seite hat.

Da der Winkel r ein Rechter ist und $x = \frac{1}{2}R$, so ist auch $z' = \frac{1}{2}R$ und also ist BFE gleichschenklig und die Linie $BF = FE$, also ist auch $AE = AF + FE = AF + FD$

Wird diese Gleichung verdoppelt, so wird

$$2 . AE = 2(AF + FE) = 2(AF + FD)$$
$$= AC + 2FE = AC + BD$$

oder da AK das Doppelte von AE ist, so ist auch

$$AK = AC + BD$$

also enthält auch der Rhombus ABCD die gegebene Summe der beiden Diagonalen.

Zweite Auflösung. Nennt man die Seite K, die Summe der beiden Diagonalen S, die größere x, so ist die kleinere $S - x$ und man hat, da die Seite und die halben Diagonalen ein rechtwinkliges Dreieck bilden, folgende Gleichung

$$K^2 = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}(S - x)^2$$

oder $$4K^2 = 2x^2 - 2Sx + S^2$$

und hieraus $$x^2 - Sx = 2K^2 - \frac{1}{2}S^2$$

Wird auf beiden Seiten $(\frac{1}{2}S)^2$ zugezählt, so entsteht

$$(x - \frac{1}{2}S)^2 = 2K^2 - \frac{1}{2}S^2 + \frac{1}{4}S^2$$

und hieraus $x = \frac{1}{2}S \pm \sqrt{2K^2 - \frac{1}{4}S^2}$

Da das Wurzelzeichen mit beiderlei Zeichen versehen seyn kann, die beiden Diagonalen aber einander ungleich sind, so ist klar, daß ihre halbe Summe zwischen beide Diagonalen falle und daß daher die größere Diagonale größer, die kleinere aber kleiner als die halbe Summe beider seyn müsse. Hieraus ergibt sich für die größere Diagonale folgende Gleichung

$$Q = \frac{1}{2}S + \sqrt{2K^2 - \frac{1}{4}S^2}$$

und für die kleinere folgende

$$q = \frac{1}{2}S - \sqrt{2K^2 - \frac{1}{4}S^2}$$

Da der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen nie eine negative Größe werden kann, wenn anders die Aufgabe möglich seyn soll, so zeigt es sich, daß das Quadrat der halben Diagonalen-Summe immer kleiner seyn muß, als das doppelte Quadrat der Rhombus-Seite. Wird der Ausdruck $\sqrt{(2K^2 - \frac{1}{4}S^2)} = 0$, so sind beide Diagonalen einander gleich und der Rhombus geht in ein Quadrat über.

§. 344.

§. 344.

Aufgabe. Es ist die Summe der beiden Diagonalen und der Winkel, durch dessen Spitze die grössere Diagonale geht, gegeben. Man soll daraus einen Rhombus bilden. Fig. 399.

Auflösung. Die Summe sey AK, der Winkel x. Man halbire den Winkel BAD = x und trage auf seine Halbirungs-Linie die Hälfte der Diagonalen-Summe AE = $\frac{1}{2}$ AK, trage ferner an den Endpunkt E den Winkel AEB = $\frac{1}{2}$ R und verlängere den Schenkel EB bis zum Durchschnitte B des Schenkels AB. Nun trage man von B aus BC = AB zwischen die Linie AB und AC, mache AD = AB und ziehe DC, so ist ABCD der gesuchte Rhombus.

Der Beweis führt sich auf die nämliche Art, wie im vorhergehenden §.

Anmerkung. Auf eine ähnliche Weise löst sich die Aufgabe, wenn die Summe der beiden Diagonalen und der Winkel, durch dessen Spitze die kleinere Diagonale geht, gegeben ist.

§. 345.

Aufgabe. Es ist die Seite und die Höhe gegeben. Man soll daraus einen Rhombus bilden. Fig. 400.

Auflösung. Die Seite sey AB, die Höhe BF. Man beschreibe über der Seite AB einen Halbkreis und trage von dem einen Endpunkte B die Höhe BF, als Sehne, in den Kreis, lege durch den andern Endpunkt A und dem Auffalls-punkt F die Linie AFD = AB und vollende den Rhombus ABCD, so ist er der gesuchte.

§. 346.

Aufgabe. Es ist der stumpfe Winkel und die Summe der Seite und Höhe gegeben. Man soll daraus einen Rhombus bilden. Fig. 401.

Auflösung. Die gegebene Summe sey FH, der gegebene Winkel sey x. Man bilde aus der gegebenen Summe FH

und der Hälfte des Ueberschusses des stumpfen Winkels über einen Rechten AHF $= \frac{1}{2}(x - R)$ ein rechtwinkliges Dreieck AHF, halbire die gefundene Hypotenuse AH durch eine senkrechte Linie GB bis zum Durchschnitte B mit HB, ziehe AB und mache AD = AB und vollende den Rhombus ABCD, so ist dieser der gesuchte.

Beweis. Nach der Construction sind die beiden Dreiecke AGB und HGB congruent, also die Linie HB und AB gleich, also auch $AB + BF = HB + BF = HF$

Da HB = BA ist, so ist das Dreitck HAB gleichschenklig und folglich die Winkel y und y' einander gleich. Es ist aber $y = \frac{1}{2}(x - R)$ und der Winkel ABF ist den beiden Winkeln y und y' gleich, also ist auch

$$ABF = y + y' = 2 . \frac{1}{2}(x - R) = x - R$$

Da endlich ABCD ein Rhombus ist, so geht BC parallel mit AD; die Linie FH steht senkrecht auf AD, folglich steht sie auch senkrecht auf der mit ihr parallel laufenden BC und es ist der Winkel FBC = R. Nun ist der Winkel

$$\begin{aligned} ABC &= ABF + FBC = x - R + R \\ &= x \end{aligned}$$

also hat der Rhombus ABCD den stumpfen Winkel und, da BF senkrecht auf AD steht, auch die gegebene Summe der Seite und Höhe und die Aufgabe ist auf die oben mitgetheilte Art gelöst.

Anmerkung. Hiernach läßt sich die Aufgabe leicht lösen, wenn die Summe der Seite und Höhe und ein spitzer Winkel gegeben ist.

§. 347.

Aufgabe. Es ist der Unterschied der Seite und Höhe und der stumpfe Winkel gegeben. Man soll daraus einen Rhombus bilden. Fig. 402.

Auflösung. Der Unterschied sey FG, der stumpfe Winkel x. Man bilde aus dem gegebenen Unterschiede FG und einem Winkel, welchem die Hälfte des Ueberschusses des stumpfen Winkels über einem Rechten zu 90° fehlt, oder dem Winkel

$$AGF = \frac{1}{2}(3R - x) = R - \frac{1}{2}(x - R)$$

ein rechtwinkliges Dreieck AGF, verlängere die beiden Katheten, halbire die Linie AG durch eine Senkrechte, welche, genugsam

verlängert, die verlängerte Kathete FG in dem Punkte B durchschneiden wird, ziehe AB, mache AD = AB und vollende mit dieser Linie den Rhombus, so ist ABCD der gesuchte Rhombus.

Beweis. Nach der Construction ist ABCD ein Rhombus, also geht BC mit AD parallel; BF steht auf AD und somit auch auf BC senkrecht, sie ist also die Höhe des Rhombus ABCD und bildet mit beiden Seiten rechte Winkel.

Nach der Construction sind die beiden Dreiecke ABH und HBG congruent, also ist AB = BG, und ferner

$$FG = BG - BF = AB - BF$$

Der Rhombus ABCD hat also die gegebene Linie FG als Unterschied zwischen Seite und Höhe.

Da AB = BG ist, so ist das Dreieck ABG gleichschenklig, also der Winkel $BAG = BGA = \frac{1}{2}(3R - x)$, folglich ist der dritte Winkel

$$ABF = 2R - 2 \cdot \frac{1}{2}(3R - x) = x - R.$$

Der Winkel ABC aber besteht aus ABF + FBC, also ist der Winkel $ABC = x - R + R = x$

Der Rhombus enthält also auch den gegebenen Winkel.

Anmerkung. Hiernach läßt sich die Aufgabe leicht lösen, wenn der Unterschied zwischen Seite und Höhe und der spitze Winkel gegeben ist.

§. 348.

Aufgabe. Die Höhe und die Diagonale ist gegeben. Man soll daraus einen Rhombus bilden. Fig. 403.

Erste Auflösung. Die Diagonale sey AC, die Höhe CF. Man bilde aus AC, als Hypotenuse, und CF, als Kathete, das rechtwinklige Dreieck ACF, halbire die Diagonale und errichte in ihrem Mittelpunkte M eine senkrechte Linie MD bis zum Durchschnitte der zweiten Kathete AF, oder ihrer Verlängerung, ziehe CD und vollende mit einer dieser Linien den Rhombus ABCD, so ist dieser der gesuchte.

Beweis. Nach der Construction ist ABCD ein Viereck, dessen Diagonale die gegebene Linie AC und dessen Höhe die gegebene Linie CF ist, da diese auf AD senkrecht steht. Es

ist nun noch zu zeigen, daß ABCD ein Rhombus sey, oder daß alle seine Seiten einander gleich sind. Nach der Construction ist AD = AB = BC, die Linie AC ist in M halbirt und MD steht senkrecht in M auf, also sind die beiden Dreiecke AMD und MDC congruent und die Linie AD = DC, folglich sind alle Seiten einander gleich und ABCD ist ein Rhombus.

Zweite Auflösung. Nennt man die Diagonale AC = Q, die Höhe CF = H, die Seite AD = x, DF = y, so hat man nach dem pythagoräischen Lehrsatze aus den Dreiecken ACF und DCF folgende Gleichungen

$$1)\quad (x + y)^2 = Q^2 - H^2$$

$$2)\quad x^2 - H^2 = y^2$$

oder
$$y = \sqrt{x^2 - H^2}$$

Wird diese Gleichung in obige gesetzt, so geht sie in folgende über
$$(x + \sqrt{x^2 - H^2})^2 = Q^2 - H^2$$

oder
$$x + \sqrt{(x^2 - H^2)} = \sqrt{Q^2 - H^2}$$

und
$$\sqrt{x^2 - H^2} = \sqrt{Q^2 - H^2} - x$$

Wird diese Gleichung ins Quadrat erhoben, so entsteht
$$x^2 - H^2 = Q^2 - H^2 - 2x\sqrt{Q^2 - H^2} + x^2$$

und hieraus
$$Q^2 = 2x\sqrt{Q^2 - H^2}$$

und demnach ist die Gleichung für die Ableitung der Seite aus der Diagonale und Höhe
$$x = \frac{Q^2}{\sqrt{(Q^2 - H^2)}}$$

Diese Ableitungsgleichung gilt für beide Diagonalen. Die Analysis für die kleinere ist in der Anlage etwas verschiedrn, führt aber zum nämlichen Resultat.

§. 349.

Aufgabe. Es ist die Seite und der Inhalt eines Rhombus gegeben. Man soll daraus einen Rhombus bilden. Fig. 404.

Erste Auflösung. Die Seite sey AB, die Seite des als Quadrat dargestellten Inhalts sey BE. Man bilde

aus der Seite AB und der Quadratlinie BE, als Katheten, das rechtwinklige Dreieck AEB, verlängere die beiden Katheten und errichte auf dem Endpunkte E der Hypotenuse AE die Linie EF senkrecht bis zum Durchschnitte F mit der Verlängerten AB, mache BG = BF und ziehe durch G die Linie DC parallel, mache AD = BC = AB, so ist ABCD der gesuchte Rhombus.

Beweis. Da der Winkel AEF ein Rechter ist und EB von der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse senkrecht gefällt ist, so ist EB die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden Abschnitten der Hypotenuse und es ist

$$EB^2 = AB \cdot BF$$

Da aber BF = BG ist, so ist auch

$$EB^2 = AB \cdot BG$$

Nach der Construction sind die Linien AB, BC und AD gleich und AB geht mit DC parallel, hieraus folgt, daß die gegenüberstehenden Linien des Vierecks ABCD parallel gehen und alle einander gleich sind, also daß ABCD ein Rhombus ist.

Da BG senkrecht auf der Seite AB aufsteht, so ist diese Linie die Höhe des Rhombus. Der Inhalt des Rhombus besteht aus dem Produkt der Seite und seiner Höhe. Das Produkt AB. BG ist dem gegebenen Inhalte EB^2 gleich, also erfüllt der Rhombus ABCD die Bedingungen der Aufgabe.

Zweite Auflösung. Nennt man den Inhalt P^2, die Seite K, die Höhe x, so hat man, da der Inhalt durch das Produkt der Seite und Höhe des Rhombus gegeben ist, folgende Gleichung $x \cdot K = P^2$

also $x = \frac{P^2}{K}$

Ist die Höhe gefunden, so läßt sich auch der Rhombus leicht bilden. Die erste Auflösung ist die kürzeste Construction dieser Formel.

§. 350.

Aufgabe. Es ist der Inhalt und die Diagonale gegeben. Man soll daraus einen Rhombus bilden. Fig. 405.

Erste Auflösung. Die Diagonale sey AC, die Seite

des als Quadrat dargestellten Inhalts sey FC. Man bilde aus der Diagonale AC und der Quadratseite FC, als Katheten, ein rechtwinkliges Dreieck ACF, verlängere die Diagonale AC, errichte in F die Linie FE senkrecht bis zum Durchschnitte E mit der Verlängerten AC. Nun halbire man die Diagonale AC und errichte MB = MD = CE senkrecht in dem Mittelpunkte M der Diagonale, ziehe die Linien AB, BC, CD, AD, so ist ABCD der gesuchte Rhombus.

Beweis. Das Dreieck AFE ist wegen des rechten Winkels bei F rechtwinklig und FC steht senkrecht auf der Hypotenuse auf, also ist FC die mittlere geometrische Proportionale zwischen AC und CE und es ist

$$FC^2 = AC \,.\, CF$$

Da BM und MD senkrecht auf AC stehen, so sind diese Linien die Höhen der Dreiecke ABC und ADC und der Inhalt beider Dreiecke ist

$$\tfrac{1}{2}(AC \,.\, MB) + \tfrac{1}{2}(AC \,.\, MD) = AC \,.\, \tfrac{1}{2}(MB + MD) =$$
$$= \tfrac{1}{2}(AC \,.\, BD)$$

Da aber CE = MD = MB ist, so ist $\frac{1}{2}$ BD = CE. Demnach ist der Inhalt der beiden Dreiecke ABC und ADC, oder der Figur ABCD

$$\tfrac{1}{2}(AC \,.\, BD) = AC \,.\, CE$$

oder, da AC . CE = FC^2 ist

$$\tfrac{1}{2}(AC \,.\, BD) = FC^2$$

das Viereck BACD hat also den gegebenen Flächeninhalt.

Das Viereck ABCD endlich ist ein Rhombus, dieß erhellt aus den vier Dreiecken AMB, BMC, CMD, DMA, welche congruent sind, da sie zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gleich haben.

Zweite Auflösung. Nennt man die Diagonale Q, den Inhalt P, die zweite Diagonale x, so hat man nach den eben mitgetheilten Bemerkungen folgende Gleichung

$$Q \,.\, x = 2\,P^2$$

und hieraus die zweite Diagonale

$$x = \frac{2\,P^2}{Q}$$

Berücksichtigt man, daß die Seite des Rhombus die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der beiden halben Diagonalen ist, so hat man

$$K = \sqrt{\left(\frac{Q^2}{4} + \frac{P^4}{Q^2}\right)}$$

Diese Gleichung gibt unmittelbar die Ableitung der Seite aus dem Inhalt und der Diagonale.

§. 351.

Aufgabe. Es ist der Inhalt und die Höhe gegeben. Man soll daraus einen Rhombus bilden. Fig. 406.

Erste Auflösung. Die Höhe sey BE und die Seite des als Quadrat dargestellten Inhalts sey BG. Man bilde aus BE und BG, als Katheten, das rechtwinklige Dreieck BEG und verlängere die beiden Katheten, errichte die Linie GA senkrecht auf EG bis zum Durchschnitte A der Verlängerten FB, mache BF = BE, bilde aus AB als Seite, und BF als Höhe nach §. 345. den Rhombus ABCD, so ist er der gesuchte.

Der Beweis führt sich auf ähnliche Weise, wie in den beiden vorhergehenden §§.

Zweite Auflösung. Nennt man den Inhalt P^2, die Höhe H, die Seite x, so erhält man zwischen dem Inhalt, der Seite und der Höhe folgende Gleichung

$$P^2 = x \cdot K$$

und hieraus gewinnt man für die Höhe

$$x = \frac{P^2}{K}$$

Die erste Auflösung ist die einfachste Construction für diese Formel.

D

Aufgaben über das Rhomboid.

§. 352.

Aufgabe. Es sind zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben. Man soll daraus ein Rhomboid bilden. Fig. 407.

Auflösung. Der Winkel sey x, die Seiten seyen AB und AD. Man trage auf die Schenkel des Winkels die beiden Seiten AB und AD und beschreibe von B aus mit BC = AD und von D aus mit DC = AB zwei sich in C durchschneidende Kreisbogen, ziehe BC und DC, so ist ABCD das gesuchte Rhomboid.

§. 353.

Aufgabe. Es sind die beiden Diagonalen und eine Seite gegeben. Man soll daraus ein Rhomboid bilden. Fig. 408.

Auflösung. Die beiden Diagonalen seyen AC und BD, die Seite AD. Man bilde aus der Seite AD und den Hälften der beiden Diagonalen AE = $\frac{1}{2}$ AC und DE = $\frac{1}{2}$BD das Dreieck AED, verlängere ED um BE = $\frac{1}{2}$ BD und AE um EC = $\frac{1}{2}$AC, ziehe die Linien AB, BC, CD, so ist ABCD das gesuchte Rhomboid.

Beweis. Wegen der Scheitelwinkel BEC und AED und der gleichen anliegenden Seiten BE = ED, AE = EC sind die beiden Dreiecke BEC und AED congruent. Aus gleichen Gründen sind die beiden Dreiecke ABE und ECD congruent, also sind die gegenüberstehenden Seiten BC und AD, AB und DC gleich und parallel. Ferner sind AC und BD die beiden Diagonalen. Hieraus folgt, daß das Viereck ABCD ein Rhomboid ist und die gegebenen Diagonalen enthält.

§. 354.

Aufgabe. Es ist die Summe zweier Nachbarseiten, die durch ihren Vereinigungspunkt gehende Diagonale und der zwischen ihr und einer der Seiten liegende Winkel gegeben. Man soll daraus ein Rhomboid bilden. Fig. 409.

Auflösung. Die Diagonale sey AC, die Summe AE, der Winkel x. Man bilde aus der Summenlinie und der Diagonale und dem Winkel x = CAE als Winkel das Dreieck ACE, halbire die dritte Seite CE und errichte in ihrem Mittelpunkte F die Linie FD senkrecht bis zu dem Durchschnitte D mit der Seitensumme, ziehe CD und durch C mit AD die Linie CB parallel, und durch A die Linie AB mit CD parallel, so ist ABCD das gesuchte Rhomboid.

Beweis. Die Linien BC und AD, AB und CD laufen mit einander parallel, also ist BC = AD, AB = CD und ABCD ist ein Rhomboid. Die Summe der beiden Seiten AB und AD ist daher der Summe der Seiten AD und DC gleich. Aus der Congruenz der Dreiecke CDF und DFE erhellt, daß CD = DE ist, also ist

$$AB + AD = AD + DE = AE$$

Das Rhomboid erfüllt also die Bedingungen der Aufgabe.

Anmerkung. Wenn von einer Diagonale und der Summe zweier Nachbarseiten eines Rhomboids die Rede ist, so können, wie leicht in die Augen fällt, unter der Summe die Seiten verstanden seyn, durch deren Vereinigungspunkt die Diagonale geht, oder diejenigen, mit denen sie ein Dreieck bildet. Da aber die Summe beider einander gleich ist, so ist eine und dieselbe Sache gegeben.

§. 355.

Aufgabe. Es ist die Diagonale, der Winkel, durch dessen Spitze sie geht, und die Summe der Seiten, welche ihn umschließen, gegeben. Man soll daraus ein Rhomboid bilden. Fig. 410.

Erste Auflösung. Die Seitensumme sey AE, die

Diagonale AC, der Winkel x. Man trage an den einen Endpunkt A der Summenlinie den Winkel x = EAB und ziehe durch den andern Punkt E die Linie EG mit AB parallel, halbire den Winkel AEG durch die unbestimmte Linie EF, beschreibe von A mit der Diagonale AC einen Kreisbogen, der die Halbirungslinie in einem Punkte C durchschneiden wird, ziehe durch diesen Punkt mit AE und AB die Linie BC und CD parallel, so ist ABCD des gesuchte Rhomboid.

Beweis. Der Winkel BAE = x. AC ist die gegebene Diagonale; die Linien AB und CD, AD und BC laufen unter einander parallel, also ist ABCD ein Rhomboid, welches den gegebenen Winkel und die durch seine Spitze gehende Diagonale AC enthält.

Die Linie EG geht mit AB und DC parallel, also ist der Winkel $ADC = AEG = 2R - x$ und $CDE = x$, ferner ist der Winkel $AEF = \frac{1}{2} AEG = \frac{1}{2}(2R - x)$. Hieraus bestimmt sich der dritte Winkel im Dreieck DCE und es ist $DCE = 2R - x - (R - \frac{1}{2}x) = R - \frac{1}{2}x$ Hieraus folgt, daß die Winkel bei E und C einander gleich sind, und daß DCE ein gleichschenkliges Dreieck und DC = DE ist. Es ist also auch

$$AD + DC = AD + ED = AE$$

oder, da DC = AB ist

$$AB + AD = AE$$

das Rhomboid entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Anmerkung. Da der Winkel $R - \frac{1}{2}x$ immer ein spitzer Winkel und die Seitensumme immer größer seyn muß, als die Diagonale, so sind nach §. 233. zwei Dreiecke ACE und AC′E möglich, die beide den Bedingungen genügen.

Wendet man nun die oben gegebenen Vorschrichften auf das Dreieck AC′E an, so erhält man das Rhomboid AB′C′D′, das mit dem Rhomboid ABCD congruent und von ihm nur der Lage nach verschieden ist. Dieß erhellt leicht aus Folgendem:

Man verlängere AB′ und EC′ bis zum Durchschnitte F, so ist wegen des Winkels FAE = x und $AEF = R - \frac{1}{2}x$ der dritte Winkel $FAE = R - \frac{1}{2}x$, also das Dreieck AFE gleichschenklig und AF = AE. Das Dreieck ACC′ ist auch gleichschenklig; dieß führt zu dem Schlusse: daß die Linie CE = FC′ ist und ferner, da B′C′

mit AE parallel geht, zu der Congruenz der Dreiecke FB′C′ und CDE, also auch zu der Gleichheit der Linien B′F und DE, AB′ und AD. Da nun DC = DE = AB = BC′ und AD = AB′ = BC = D′C′ und der Winkel bei A beiden gemeinschaftlich ist, so sind die beiden Rhomboide selbst congruent und haben gleiche Seitensumme.

Zweite Auflösung. Fig. 411. Man beschreibe über der gegebenen Diagonale AC einen Kreisbogen AEC, welcher den Winkel $R - \frac{1}{2}x$ faßt, trage von dem einen Endpunkte A der Diagonale AC die Summenlinie AE, als Sehne, in den Kreisbogen, ziehe EC, halbire diese Linie und errichte in ihrem Mittelpunkte F die Linie FB senkrecht bis zum Durchschnitte B der Summenlinie und ziehe BC, und dann durch den andern Punkt A die Linie AD mit BC, durch C die Linie CD mit AB parallel, so ist ABCD das gesuchte Rhomboid.

Beweis. Die Linien AD und BC, AB und DC laufen mit einander parallel, daher ist ABCD ein Rhomboid, welches die gegebene Diagonale hat.

Nach der Construction ist der Winkel $AEC = R - \frac{1}{2}x$ und das Dreieck BEF dem Dreiecke BFC congruent. Hieraus folgt die Gleichheit der Winkel x und x′ und der Seiten BC und BF. Geht man von den Winkeln x und x′ auf den Winkel ABC über, so ist

$$ABC = x + x' = 2R - x$$

also wegen der Parallel-Linie AD und BC der Winkel

$$DAB = 2R - ABC = 2R - (2R - x) = x$$

Der Winkel, durch dessen Spitze die Diagonale geht, ist demnach dem gegebenen gleich. Endlich ist auch

$$AB + BC = AB + BE = AE$$

oder, da AD = BC ist

$$AD + AB = AE$$

Des Rhomboid ABCD erfüllt die Bedingungen der Aufgabe.

Anmerkung. Die Summenlinie läßt sich, da sie größer als die Diagonale ist, nach zwei Richtungen so lange in den Kreisbogen eintragen, als AE kleiner ist, als der Durchmesser des umschriebenen Kreises. In diesen Fällen sind also auch zwei Dreiecke AEC und AE′C möglich, die zwei Rhomboide ABCD und AB′CD′ erzeugen. Auch diese sind unter sich congruent und nur der Lage nach von einander unterschieden.

§. 356.

Aufgabe. Es ist die Diagonale, der ihr gegenüberstehende Winkel und die Summe der ihn umschließenden Seiten gegeben. Man soll daraus ein Rhomboid bilden.

Erste Auflösung. Fig. 410. Die Seitensumme sey AE, die Diagonale AC, der Winkel y. Man trage an den einen Endpunkt E der Linie AE den Winkel AEG = y, halbire ihn und ziehe durch den andern Endpunkt A die Linie AF parallel mit EG, beschreibe von A mit AC, als Radius, einen Kreisbogen CC′, der die Halbirungslinie durchschneidet und verfahre dann weiter, wie bei der ersten Auflösung des vorigen §, so ist ABCD das gesuchte Rhomboid.

Zweite Auflösung. Fig. 411. Man beschreibe über der Diagonale AC einen Kreisbogen, der den Winkel $\frac{1}{2}$y faßt, trage von dem einen Endpunkte A die Seitensumme, als Sehne, in den Kreisbogen, verfahre dann wie in der zweiten Auflösung des vorigen §, so ist ABCD das gesuchte Rhomboid.

§. 357.

Aufgabe. Es ist die Diagonale, der Winkel, durch dessen Spitze sie geht, und der Unterschied zweier Nachbarseiten gegeben. Man soll daraus ein Rhomboid bilden. Fig. 412.

Erste Auflösung. Die Diagonale sey AC, der Winkel x = GED und der Unterschied AE. Man halbire den gegebenen Winkel durch eine unbestimmte Linie, verlängere die Linie DE um den Unterschied EA und lege von A die Diagonale so an, daß ihr Endpunkt C in die Halbirungslinie falle. Nun ziehe man durch den Punkt C die Linie CB mit AD, CD mit EG und durch A die Linie AB mit DC parallel, so ist ABCD das gesuchte Rhomboid.

Beweis. Die Linien AB und CD, BC und AD gehen unter sich parallel, also ist ABCD ein Rhomboid und hat die Linie AC als Diagonale.

Da die Linien BA, GE, CD unter sich parallel sind, so ist der Winkel BAE = CDH = GED = x, also ist der Winkel BAD, durch dessen Spitze die Diagonale AC geht, dem gegebenen Winkel gleich. Der Winkel $z = \frac{1}{2}x$ und der Winkel CDH = x. Geht man von beiden auf den Winkel z über, so ist $z' = CDH - z = x - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x$
also sind die Winkel z und z' einander gleich, und das Dreieck EDC gleichschenklig und ED = DC. Hieraus fließt endlich

$$AE = AD - DE = AD - DC$$

das Rhomboid ABCD ist also das gesuchte.

Zweite Auflösung. Fig. 413. Man halbire den Winkel GED durch die unbestimmte Linie EC, trage auf ED den Unterschied EA und lege die Diagonale zwischen den Punkt A und die Halbirungslinie, ziehe durch den Punkt C die Linie CB mit DE, CD mit GE, und durch A die Linie AB mit GE parallel bis zu den Durchschnitten in B und D, so ist ABCD das gesuchte Rhomboid.

Der Beweis führt sich aus dem Vorigen leicht.

Anmerkung. Hieraus ergibt sich leicht die Auflösung folgender Aufgabe: Es ist die Diagonale, der ihr gegenüberstehende Winkel und der Unterschied zweier Nachbarseiten gegeben und man soll daraus ein Rhomboid bilden, wenn man den gegebenen Winkel y nennt, und nun nach obigen Auflösungen statt x, seinen Ergänzungswinkel zu zweien Rechten, 2 R — x, setzt und auf ihn die eben angegebenen Vorschriften anwendet.

§. 358.

Aufgabe. Es ist die Diagonale und der Unterschied der beiden Winkel, welche zwischen ihr und den beiden Seiten des Rhomboids liegen, dann der Unterschied der beiden Seiten gegeben. Man soll daraus ein Rhomboid bilden. Fig. 414.

Auflösung. Die Diagonale sey AC, der Seitenunterschied AE, der Winkelunterschied δ. Man trage an den einen Endpunkt C der Diagonale die Hälfte des gegebenen Winkels $ACE = \frac{1}{2}\delta$ unter unbestimmtem Schenkel, beschreibe von dem

andern Endpunkte A mit dem Unterschiede AE, als Radius, den Kreisbogen EE', so wird dieser die Linie CE' in zwei Punkten E und E' durchschneiden, nun ziehe man durch A und E die Linie AD, und durch E' und A die Linie E'B und mit beiden durch den Punkt C die Linie CB und CD parallel, so ist ABCD das gesuchte Rhomboid.

Beweis. Die Linien AB und CD, BC und AD sind parallel, also ist ABCD ein Rhomboid, welches die Diagonale AC hat.

Wegen der Parallelen BE' und CD sind die Winkel EAD und ADC einander gleich. Das Dreieck AE'E ist gleichschenklig, folglich ist der Winkel $v = v'$. Die Winkel v und z sind Scheitelwinkel, also ist auch $v = z$. In den Dreiecken AEE' und EDC sind zwei Winkel, einzeln genommen, einander gleich, also sind auch die dritten Winkel einander gleich, daher auch $z = z'$. Hieraus folgt, daß das Dreieck EDC gleichschenklig ist und daß $ED = CD$, und ferner, daß

$$AE = AD - ED = AD - DC$$

ist, und die Nachbarseiten um den gegebenen Unterschied von einander verschieden sind.

Geht man endlich von dem Winkel $s = \frac{1}{2}\delta$ auf r und z über, so ist
$$z = r + \tfrac{1}{2}\delta$$
also auch
$$z' = r + \tfrac{1}{2}\delta$$
Da nun $ACD = s + z' = r + \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta = r + d$ ist, so ist der Winkel ACD, welcher der Diagonale anliegt, um den gegebenen Winkel d größer, als der andere ihr anliegende Winkel r. Das Rhomboid ABCD entspricht also den Bedingungen der Aufgabe.

§. 359.

Aufgabe. Es sind die beiden Diagonalen und ein Winkel gegeben. Man soll daraus ein Rhomboid bilden. Fig. 415.

Auflösung. Die beiden Diagonalen seyen AC und BC, der Winkel, welcher der kleinern Diagonale gegenübersteht, x. Man beschreibe über und unter der kleinern Diagonale AC die

Kreisbögen ABFC und AF'DC, welche den Winkel x fassen, halbire die Diagonale AC und trage von ihrem Mittelpunkte E die Hälfte der größern Diagonale BE = ED = $\frac{1}{2}$BD in die zwei Kreisbogen, ziehe CD, BC, BA und AD, so ist ABCD das gesuchte Rhomboid.

Beweis. Die Linie EC = EA, die Linie ED = EB und fällt in gleichen Kreisbogen mit ihren Endpunkten B und D in die Peripherie, schneidet also gleiche Bogen CD und AB, AFD und BFC ab. Da nun gleichen Bogen in gleichen Kreisen gleiche Sehnen zugehören, so ist CD = BA, AD = BC, also ABCD ein Rhomboid, worin der Winkel bei B und D sich und dem gegebenen Winkel x, und die Winkel bei A und C unter einander gleich sind. Nimmt man zu den Winkeln bei A und C die sie umschließenden gleichen Seiten BC und CD, AD und AB, so führt dieß zur Congruenz der beiden Dreiecke BCD und BAD; dieß ist aber nur möglich, wenn die Punkte B, E und D in gerader Linie liegen. Hieraus folgt, daß BE + ED = 2 . $\frac{1}{2}$BD = BD der gegebenen Diagonale gleich ist, und daß also ABCD das gesuchte Rhomboid ist.

Anmerkung. Es leuchtet ein, daß die Construction die nämliche bleibt, wenn auch der, der größern Diagonale gegenüberstehende, Winkel gegeben ist. Es ist zu bemerken, daß der größern Diagonale der stumpfe, der kleinern der spitze Winkel gegenübersteht.

§. 360.

Aufgabe. Es ist eine Seite, die Summe der Diagonale und andern Seite und der Winkel, durch dessen Spitze die Diagonale geht, gegeben. Man soll daraus ein Rhomboid bilden. Fig. 416.

Auflösung. Die Seite sey AD, die Summe der Diagonale und andern Seite DE, der Winkel x. Man trage an den einen Endpunkt A der Seite AD den Winkel x = BAD und errichte auf dem andern Endpunkte D die gegebene Summe DE parallel mit dem Schenkel AB des Winkels x, ziehe AE, halbire diese Linie und errichte in ihrem Mittelpunkte E die Linie EC senkrecht bis zum Durchschnitte C der

Summenlinie DE, ziehe CB parallel mit AD bis zum Durchschnitte B mit dem Schenkel AB, so ist ABCD das gesuchte Rhomboid.

Beweis. Die Linie AB ist mit CD parallel, der Winkel BAC = x und AD die gegebene Seite, also ist ABCD ein Rhomboid, welches den gegebenen Winkel x und die Seite AD enthält. Nach der Construction sind die Dreiecke AFC und FCE congruent, also die Linie AC = CE und folglich

$$AC + CD = EC + CD = ED$$

Die Linie AC bildet die Diagonale, welche durch die Spitze des Winkels x geht; die Summe von ihr und der Seite CD ist der gegebenen Linie gleich, also ist ABCD das gesuchte Rhomboid.

§. 361.

Aufgabe. Es ist eine Seite, die Summe der Diagonale und andern Seite und der, der Diagonale gegenüberstehende, Winkel gegeben. Man soll daraus ein Rhomboid bilden. Fig. 416.

Auflösung. Die gegebene Seite sey AD, die Summen-Linie DE, der Winkel y. Man trage an den Endpunkt D der Seite AD unter dem Winkel ADE = y die Summen-Linie DE, ziehe durch den andern Endpunkt A die Linie AB mit DE parallel, ziehe die Linie AE, halbire sie und errichte in ihrem Mittelpunkte die Linie FC senkrecht bis zum Durchschnitte C, ziehe AC, dann CB mit AD parallel, so ist ABCD das gesuchte Rhomboid.

Der Beweis führt sich nach §. 360. leicht.

§. 362.

Aufgabe. Es ist die eine Seite und der Unterschied zwischen der Diagonale und der andern Seite und der Winkel, durch dessen Spitze die Diagonale geht, gegeben. Man soll daraus ein Rhomboid bilden. Fig. 417.

Auflösung. Der Unterschied sey DE, die Seite DC,

der

der Winkel sey x. Man bilde aus dem gegebenen Winkel x und den Linien DC und DE, als umschließende Seiten, das Dreieck DCE, verlängere DE und errichte in dem Mittelpunkte F der Linie EC eine senkrechte Linie FA bis zum Durchschnitte A mit dem verlängerten Unterschiede ED, ziehe durch A mit CD und durch C mit AD die Linien AB und CD bis zu ihrem Durchschnitte B parallel, so ist ABCD das gesuchte Rhomboid.

Beweis. Die Linien AB und DC, BC und AD sind mit einander parallel, also ist ABCD ein Rhomboid, das die gegebene Seite DC enthält, der Winkel ABD ist wegen der Parallele CD dem Winkel CDE = x gleich, also hat es auch den Winkel x.

Die Dreiecke ACF und AFE sind congruent, also ist AE = AC und folglich

$$DE = AE - AD = AC - AD$$

und es ist die Diagonale AC, welche durch die Spitze des Winkels x geht, um den gegebenen Unterschied größer, als die zweite Seite. Hieraus folgt, daß ABCD das gesuchte Rhomboid ist.

Anmerkung. Ist der Unterschied DE zwischen der Diagonale AC und der einen Seite AD, die andere Seite DC und der Winkel ADC = y, welcher der Diagonale gegenübersteht, gegeben, und wird verlangt ein Rhomboid daraus zu bilden, so bilde man aus dem Ergänzungswinkel zu zwei Rechten CDE = 2 R — y und den beiden Linien, als anliegenden Seiten, das Dreieck DCE und verfahre dann, wie eben angegeben wurde, so wird ABCD das gesuchte Rhomboid seyn.

§. 363.

Aufgabe. Es sind die zwei Seiten und eine Höhe gegeben. Man soll daraus ein Rhomboid bilden. Fig. 418.

Auflösung. Die eine Seite sey AB, die andere BD, die Höhe, welche der Seite AD zugehört, BE. Man be-

schreibe über der Seite AB, welche der Höhe nicht zugehört, einen Halbkreis AEB, trage von dem einen Endpunkte B der Seite AB die Höhe, als Sehne, in den Halbkreis und lege durch die Punkte A und E die zweite Seite AD, mache BC = AD und DC = AB, so ist ABCD das gesuchte Rhomboid.

Die Richtigkeit der Construction rechtfertigt sich leicht.

§. 364.

Aufgabe. Es ist die Diagonale, eine Höhe und die der Höhe zugehörige Seite gegeben. Man soll aus ihr ein Rhomboid bilden.

Auflösung. Fig. 419. Die Diagonale sey AC, die Höhe CE und die ihr zugehörige Seite AD. Man beschreibe über der Diagonale AC, als Hypotenuse, einen Halbkreis AEC, trage von dem einen Endpunkte C die Höhe CE, als Sehne, in den Halbkreis, ziehe AE und trage von A die Seite AD auf AE, ziehe CD und mache CB = AD und AB = DC, so ist ABCD das gesuchte Rhomboid.

Beweis. Die Linie AD = BC, AB = CD, also ist ABCD ein Rhomboid, das die gegebene Seite AD und Diagonale AC enthält. Die Linie CE steht wegen des rechten Winkels bei E auf AE oder AD senkrecht, also hat ABCD auch die der Linie AD zugehörige Höhe.

§. 365.

Aufgabe. Es ist die Diagonale, eine Seite und die der andern zugehörige Höhe gegeben. Man soll daraus ein Rhomboid bilden. Fig. 420.

Auflösung. Die Diagonale sey AC, die eine Seite AB und die der andern zugehörige Höhe BE. Man beschreibe über der gegebenen Seite AB einen Halbkreis AEB, trage von dem

einen Endpunkte B die gegebene Höhe, als Sehne, in den Halbkreis, lege durch die Punkte A und E eine unbestimmte Linie und mit dieser durch den Punkt B die Linie BC parallel, trage von A die Hypotenuse AC so an, daß ihr Endpunkt C in die Linie BC falle und ziehe durch C mit BA die Linie CD parallel, so ist ABCD das gesuchte Rhomboid.

Beweis. Nach der Construction ist ABCD ein Rhomboid, das die Höhe und Seite AB und, wegen des rechten Winkels bei E, die der andern Seite zugehörige Höhe enthält, und ferner die gegebene Diagonale AC.

§. 366.

Aufgabe. Es ist die Höhe und es sind die beiden Diagonalen gegeben. Man soll daraus ein Rhomboid bilden. Fig. 421.

Auflösung. Die Höhe sey FG, die eine Diagonale AC, die andere BD. Man errichte auf irgend einem Punkte G einer geraden Linie die Hälfte der Höhe EG $= \frac{1}{2}$FG senkrecht und trage von ihrem Endpunkte E die Hälfte der einen Diagonale ED $= \frac{1}{2}$BD so an, daß ihr Endpunkt D in die Linie GD falle. Ein Gleiches thue man mit der Hälfte der andern Diagonale EA $= \frac{1}{2}$AC. Nun verlängere man die Linien DE und EA rückwärts um sich selbst, daß EB $=$ ED und EC $=$ EA werde, ziehe die Linien AB, BC, CD, so ist ABCD das gesuchte Rhomboid.

Beweis. Die Linien BE und ED, AE und EC sind einander gleich, also ist AC $=$ 2 AE, BD $=$ 2 ED und AC und BD den gegebenen Diagonalen gleich. Aus der Gleichheit der genannten Linien und der Scheitelwinkel BEC und AED, BEA und CED folgt die Congruenz der Dreiecke BCE und AED, BEA und ECD, also auch die Gleichheit der Seiten BC und AD, AB und CD. Das Viereck ABCD ist also ein

Rhomboid und in ihm bilden die gegebenen Linien die zwei Diagonalen.

Hieraus folgt weiter, daß BC und AD parallel laufen und daß folglich die Verlängerte GE, da sie auf AD senkrecht steht, auch auf BC senkrecht stehen müsse, also in den Dreiecken AED und BEC die Höhen und eine gerade Linie bildet. Aus der Congruenz der Dreiecke AED und BEC folgt auch die Gleichheit ihrer Höhen, also ist GE = EF und GF = 2 EG. Das Rhomboid hat also die gegebene Höhe und erfüllt die Bedingungen der Aufgabe.

Anmerkung. In der vorgelegten Aufgabe wurde der Fall betrachtet, wenn die kleinere Höhe gegeben ist. Das Verfahren bleibt mit einigen, sich von selbst ergebenden Abänderungen, das gleiche, wenn die beiden Diagonalen und die größere Höhe gegeben sind.

E

Aufgaben über das Trapez.

---

§. 367.

Aufgabe. Es sind die vier Seiten gegeben. Man soll daraus ein Trapez bilden. Fig. 422.

Auflösung. Die Seiten seyen A'B', B'C', C'D', D'A', die Parallelseiten B'C' und A'D'. Man schneide die kleinere Parallelseite B'C' = ED auf der größern AD = A'D' ab und bilde aus ihrem Unterschiede AE und den beiden nicht parallelen Seiten AB = A'B' und BE = C'D' das Dreieck ABE, ziehe durch dessen Spitze B die Seite BC = B'C' mit AD parallel und verbinde die Endpunkte C und D durch die gerade Linie CD, so ist ABCD das gesuchte Trapez.

Beweis. Die Seite AB = A'B', BC = B'C' und AD = A'D'. Da nun BC = ED und beide Linien miteinander parallel gehen, so ist CD = BE, also auch CD = C'D', weil BE = C'D' ist. Das Trapez hat also die vier gegebenen Seiten.

§. 368.

Aufgabe. Es sind drei Seiten und der an der vierten liegende Winkel gegeben. Man soll daraus ein Trapez bilden.

Erste Auflösung. Fig. 422. Die Seiten seyen A'D', D'C', B'C', der an A liegende Winkel sey x; A'D' und B'C' seyen die Parallelen. Man bilde aus dem Unterschiede der Parallelen AE = A'D' — B'C' und der nicht parallelen Seite BE = C'D' und dem ihr gegenüberstehenden Winkel BAE = x nach §. 233. das Dreieck ABE, verlängere AE und ED = B'C', ziehe durch die Spitze B des Dreiecks ABE die Seite BC = B'C' parallel mit AD und ziehe DC, so ist ABCD das gesuchte Trapez.

Zweite Auflösung. Fig. 423. Man trage an die Seite AD = A'D' den Winkel DAB = x und an irgend einem Punkte e des Schenkels AB die Linie ef = B'C' parallel mit AD und lege durch ihren Endpunkt f die Linie CC' parallel mit der gegenüberstehenden AB und von D aus beschreibe man mit dem Radius DC = D'C' einen Kreisbogen, der die Linie C'C in dem Punkte C durchschneiden wird, ziehe durch diesen Punkt die Linie CB parallel mit AD und verbinde C und D, so ist ABCD das gesuchte Trapez.

Beweis. In dem Trapez ABCD ist der Winkel bei A dem gegebenen Winkel x gleich; ferner ist AD = A'D', CD = C'D', da C'C mit AB und BC mit AD und ef parallel geht, so ist auch BC = ef = B'C'. Das Trapez ABCD ist daher das gesuchte.

Anmerkung zu 1. Da die Construction des Trapezes von der Bildung eines Dreiecks aus zwei Seiten und einem gegenüberstehenden Winkel abhängt, so ist dasselbe so lange unbestimmt, als die Bemerkungen des §. 233. angeben. Das Nämliche ist der Fall bei der zweiten Auflösung, denn die Linie CC' wird in bestimmten Fällen zwei Durchschnitte zulassen.

Die Aufgabe ist nicht mehr unbestimmt, wenn unter den drei gegebenen Seiten die beiden divergirenden Seiten gegeben sind, weil alsdann ein eingeschlossener Winkel gegeben ist.

§. 369.

Aufgabe. Es sind die zwei parallelen Seiten und die gegenüberstehenden Winkel gegeben. Man soll daraus ein Trapez bilden. Fig. 422.

Auflösung. Die Seiten seyen B'C' und A'D', die Winkel bei A und C seyen x und y. Man schneide auf der größern Seite AD = A'D' die kleinere ED = B'C' ab, trage an den Punkt A den Winkel BAD = x und an E den Winkel BED = y, ziehe BE bis zum Durchschnitte B mit AB und durch den Punkt B die Linie BC = B'C' mit AD parallel, ziehe CD, so ist ABCD das gesuchte Trapez.

Beweis. Da die Linie ED der Linie BC parallel und gleich ist, so ist auch CD parallel und gleich mit der Linie BE,

also ist EBCD ein Parallelogramm und die gegenüberstehenden Winkel einander gleich, also BED = BCD = y. Die Linie BC = B'C', AD = A'D' und der Winkel bei A = x, also entspricht das Trapez ABCD den aufgestellten Bedingungen.

§. 370.

Aufgabe. Es sind die zwei Parallelen und die an der größern anliegenden Winkel gegeben. Man soll daraus ein Trapez bilden. Fig. 422.

Auflösung. Die Seiten seyen A'D' und B'C', die Winkel x und y. Aus dem Unterschiede AE der beiden Seiten und den beiden Winkeln x und y bilde man das Dreieck ABE und verfahre dann, wie im vorhergehenden §.

Anmerkung. Die Aufgabe, aus den zwei Parallelen und den, an den kleinern Seiten liegenden, Winkeln ein Trapez zu bilden, löst sich nun leicht.

§. 371.

Aufgabe. Es sind die zwei divergirenden Seiten, eine Parallele und die Summe der an einer von beiden Parallelen liegenden Winkel gegeben. Man soll daraus ein Trapez bilden. Fig. 424.

Auflösung. Die gegebenen Linien seyen A'B', B'C', C'D', die Summe der an der vierten Seite liegenden Winkel sey x. Man bilde aus einem Winkel, welcher dem Unterschiede zwischen zweien Rechten und der gegebenen Summe gleicht, $y = ebf = 2R - x$ und den Hälften der beiden divergirenden Seiten $eb = \frac{1}{2}A'B'$ und $bf = \frac{1}{2}C'D'$ das Parallelogramm ebfd, ziehe durch die Punkte b und d die Linien AD und BC mit der Diagonale ef parallel, mache $Bb = bC = \frac{1}{2}B'C'$ und trage von dem Endpunkte B die Linie BA = B'A' und von C die Linie CD = C'D' zwischen die beiden Parallelen; so ist ABCD das gesuchte Trapez.

Beweis. Wird die Diagonale ef bis zu den Durchschnitten a und c der beiden Seitenlinien verlängert, so halbirt sie die zweite Diagonale bd und nach §. 71. alle Linien zwischen den beiden Parallelen AD und BC, also ist aB = aA und Cc = cD,

also auch $Cc = \frac{1}{2}C'D'$ und $aB = \frac{1}{2}A'B'$ und es ist, da $bf = \frac{1}{2}C'D'$ und $eb = \frac{1}{2}A'B'$ ist, $bf = Cc$ und $eb = aB$, $AB = A'B'$ und $CD = C'D'$. Hieraus folgt, da ac mit BC parallel geht, daß AB mit eb und CD mit bf parallel lauft, oder, da ed mit bf und eb mit fd parallel geht, daß ed mit CD und df mit AB parallel läuft. Dieß führt zu dem Schlusse, daß der Winkel $z = CDA$ und $r = BAD$ ist. Es ist aber der Winkel $ebf = y$ und $z + r = BAD + ADC$ und $z + r = 2R - y = x$, also sind auch die beiden Winkel an der parallelen Seite AD der gegebenen Summe gleich

$$x = z + r = BAD + ADC$$

Das Trapez entspricht also den Bedingungen der Aufgabe.

§. 372.

Aufgabe. Es sind die zwei parallelen Seiten, die ihnen zugehörige Halbirungs-Linie und eine dritte Seite gegeben. Man soll daraus ein Trapez bilden. Fig. 425.

Auflösung. Die parallelen Seiten seyen B'C' und A'D', die dritte C'D', die Halbirungslinie sey b'd'. Man bilde aus der Hälfte des Unterschiedes der beiden Parallel-Linien $dk = \frac{1}{2}A'D' - \frac{1}{2}B'C'$, der Halbirungslinie $bd = b'd'$ und der dritten Seite $bk = C'D'$ das Dreieck bdk und ziehe durch dessen Spitze b mit dk die Linie BC parallel, verlängere dk auf beiden Seiten und mache $dD = Ad = \frac{1}{2}A'D'$ und $Bb = bC = \frac{1}{2}B'C'$, ziehe AB und CD, so ist ABCD das gesuchte Trapez.

Beweis. Die Linie $AD = 2 \,.\, \frac{1}{2}A'D' = A'D'$, die Linie $BC = 2 \,.\, \frac{1}{2}B'C' = B'C'$, die Linie $kD = \frac{1}{2}A'D' - \frac{1}{2}(A'D' - B'C') = \frac{1}{2}B'C'$, also ist auch, da $bC = \frac{1}{2}B'C'$ ist, $bC = kD$. Aus der Gleichheit dieser Linien und aus ihrer Parallelität folgt, daß bCDk ein Parallelogramm und daß also $CD = bk = C'D'$ ist. Das Trapez ABCD erfüllt also die Bedingungen der Aufgabe.

§. 373.

Aufgabe. Es ist eine parallele Seite, die ihr zugehörige Halbirungs-Linie und es sind die zwei anliegenden Winkel gegeben. Man soll daraus ein Trapez bilden. Fig. 426.

Auflösung. Die Parallele sey A'D', die ihr zugehörige Halbirungslinie b'd', die Winkel seyen x und y. Man trage an den Endpunkt irgend einer Linie nm die gegebenen Winkel x und y, halbire diese Linie in f, vollende das Dreieck nbm und lege durch die Spitze b und den Mittelpunkt f, die gegebene Halbirungslinie bd = b'd', ziehe durch ihren Endpunkt d eine Linie AD parallel mit nm und mache Ad = dD = $\frac{1}{2}$A'D', ziehe CD = C'D' parallel mit bk und AB = A'B' parallel mit gb und ziehe BC, so ist das Viereck ABCD das gesuchte Trapez.

Der **Beweis** führt sich leicht.

Anmerkung. Ist die kleiner Parallelseite und die ihr zugehörige Halbirungslinie und die anliegenden Winkel x und y gegeben, so bilde man aus 2 R — x und 2 R — y und einer beliebigen Linie nm das Dreieck nbm und verfahre wie vorhin.

§. 374.

Aufgabe. Es sind die beiden Diagonalen und die beiden parallelen Seiten gegeben. Man soll daraus ein Trapez bilden. Fig. 427.

Erste Auflösung. Die Diagonalen seyen B'D' und A'C', die parallelen Seiten B'C' und A'D'. Man nehme die halbe Summe der beiden parallelen Seiten ac = $\frac{1}{2}$B'C' + $\frac{1}{2}$A'D' bilde mit ihr, als Diagonale, und den Hälften der beiden Diagonalen ab = $\frac{1}{2}$A'C' und bc = $\frac{1}{2}$B'D', als Seiten, das Parallelogramm abcd und ziehe durch die Punkte b und d die Linien BC und AD mit ac parallel, mache Bb = bC = $\frac{1}{2}$B'C' und Ad = dD = $\frac{1}{2}$A'D', ziehe die Seiten AB und CD, so ist ABCD das gesuchte Trapez.

Beweis. Man ziehe die Diagonale bd, so wird diese bekanntlich in dem Punkte e durch die Linie ac halbirt. Hieraus folgt §. 71., daß alle Linien zwischen den Parallelen BC und AD durch die Linie ac halbirt werden. Demnach ist aB = aA und Cc = cD.

Zieht man nun in dem Trapez ABCD die Diagonale BD, so entsteht das Dreieck BCD, dessen Seiten BC und CD durch die Linie bc so getheilt werden, daß

$$Bb : bC = cD : Cc \text{ ist.}$$

Hieraus folgt, daß die Dreiecke BCD und bCc ähnlich sind, und daß BD mit bc parallel geht. Hieraus fließt ferner die Proportion

$$CD : Cc = BD : bc$$

Da nun Cc die Hälfte von CD ist, so ist auch bc die Hälfte von BD. Die Linie bc = $\frac{1}{2}$B'D', also ist auch

$$2\,bc = B'D' = BD$$

und die Diagonale BD ist der gegebenen Linie B'D' gleich. Auf gleiche Art wird auch bewiesen, daß AC = A'C' ist. Die Seite BC = B'C' und AD = A'D'. Hieraus folgt, daß das Trapez ABCD die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Zweite Auflösung. Die beiden parallelen Seiten BC und AD erzeugen mit den Diagonalen BD und AC zwei ähnliche Dreiecke BkC und AkD. Nennt man nun die eine Parallele P, die andere p, die eine Diagonale Q, die andere q, das Stück Bk der einen Diagonale y, so ist kD = Q — y, Ak = x, so ist kC = q — x. Nun hat man folgende Proportionen

$$1)\quad BC : Bk = AD : kD$$

oder $$P : y = p : Q - y$$

$$2)\quad BC : kC = AD : Ak$$

oder $$P : q - x = p : x$$

Aus der ersten Proportion gewinnt man folgende Gleichung

$$y \cdot p = P \cdot Q - Py$$

und hieraus $$y = \frac{P \cdot Q}{P + p}$$

Aus der zweiten Gleichung gewinnt man folgende

$$P \cdot q - p x = P x$$

und hieraus $x = \frac{P \cdot q}{P + p}$

Sind diese beiden Linien gefunden, so läßt sich leicht mit ihnen und der ihnen zugehörigen Parallele das Dreieck BkC bilden und dann, wann dieses gefunden ist, sofort das Trapez ABCD vollenden.

§. 375.

Aufgabe. Es sind zwei anliegende Seiten und die zwei ihnen gegenüberstehenden Winkel, welche zwischen der Diagonale und den unbekannten Seiten liegen, gegeben. Man soll daraus ein Trapez bilden. Fig. 428.

Auflösung. Die beiden Seiten seyen A'D' und C'D', die Parallele sey A'D', die gegebenen Winkel x und y. Man bilde mit der Linie AD = A'D' und dem Winkel A = 2 R — (x + y) und dem Winkel ADB = y das Dreieck ABD, ziehe durch dessen Spitze B die Linie BC mit AD parallel und trage von D aus die Linie DC = D'C' zwischen die parellelen Linien, so ist ABCD das gesuchte Trapez.

Beweis. Der Winkel ABD = 2 R — BAD — BDA
= 2 R — [2 R — (x + y)] — y = x

Der Winkel CBD = BDA, weil die beiden Linien BC und AD parallel gehen. Da nun BDA = y ist, so ist auch CBD = y und folglich hat das Viereck ABCD die beiden Winkel x und y, welche den gegebenen Seiten CD = C'D' und AD = A'D' gegenüber stehen, die Linie BC ist mit AD parallel, also ist ABCD ein Trapez und erfüllt die Bedingungen der Aufgabe.

Anmerkung. Die Aufgabe ist so lange unbestimmt, als mit der Linie CD zwei Durchschnitte C und C' in der Paralle BC möglich sind.

§. 376.

Aufgabe. Es sind zwei anliegende Seiten, der eingeschlossene und der einer Seite gegenüberstehende

Diagonal-Winkel gegeben. Man soll daraus ein Trapez bilden. Fig. 429.

Auflösung. Die gegebenen Seiten seyen A'B' und A'D', der eingeschlossene Winkel sey x, der Winkel zwischen der Diagonale und Seite, welcher A'B' gegenübersteht, sey y. Man trage auf den Schenkeln des Winkels x = BAD die beiden Seiten AB = A'B' und AD = A'D' auf, beschreibe über der Seite AB einen Kreisbogen BCA, welcher den Winkel y = BCA faßt, ziehe durch den Punkt B mit der Linie AD, die Linie BC parallel bis zum Durchschnitte C der Peripherie und ziehe DC, so ist ABCD das gesuchte Trapez, denn es enthält die verlangten Stücke nach der Ordnung, wie sie angegeben sind.

§. 377.

Aufgabe. Es ist ein Winkel, es sind die zwei um ihn liegenden Seiten und die Summe der beiden übrigen gegeben. Man soll daraus ein Trapez bilden. Fig. 430.

Auflösung. Der Winkel sey x, die Parallele sey BC, die andre BA, die Summe der beiden übrigen AE. Man trage auf die Schenkel des gegebenen Winkels x = ABC die Seiten BA und BC, ziehe durch den Endpunkt A der Seite AB die Summenlinie AE parallel mit BC und verbinde die Endpunkte C und E durch eine gerade Linie, halbire diese durch die Senkrechte FD bis zum Durchschnitte D mit der Summenlinie, ziehe DC, so ist ABCD das gesuchte Trapez.

Beweis. Das Trapez enthält den gegebenen Winkel und die umliegenden Seiten. Nach der Construction sind die beiden Dreiecke DCF und DFE congruent, und es ist also DC = ED, also auch

$$AD + DC = AD + DE = AE$$

Das Trapez hat also auch zwei Seiten, deren Summe der gegebenen gleich kommt.

§. 378.

Aufgabe. Es ist ein Winkel, es sind die zwei ihn umschließenden Seiten und der Unterschied der beiden übrigen gegeben. Man soll daraus ein Trapez bilden. Fig. 431.

Auflösung. Der Winkel sey x, die Parallelseite sey BC, die andere BA, die Unterschiedslinie AE. Man trage auf die Schenkel des Winkels x = ABC die beiden Seiten BA und BC und lege durch den Punkt A den Unterschied AE mit BC parallel, ziehe EC und halbire EC durch eine Senkrechte, daß sie die Verlängerte AE in D durchschneidet, ziehe DC, so ist ABCD das gesuchte Trapez.

Beweis. Das Trapez enthält den Winkel und die umliegenden Seiten. Da EDF und DFC congruente Dreiecke sind, so ist ED = DC, also

$$AE = AD - ED = AD - DC$$

Das Trapez ABCD enthält also auch den Unterschied der beiden übrigen Seiten.

F

Aufgaben über das Viereck im Allgemeinen.

---

§. 379.

Folgende Betrachtungen der Eigenschaften des Vierecks werden nicht unwillkommen seyn, da sie Mittel an die Hand geben, neue Klassen von Aufgaben über das Viereck aufzufinden und zu lösen.

Zieht man in einem Vierecke ABCD Fig. 432. die beiden Diagonalen AC und BD, so zerlegt jede das Viereck ABCD in zwei Dreiecke ABC und ADC, ABD und BDC, die zusammen dem Viereck gleich kommen.

Halbirt man die vier Seiten des Vierecks in den Punkten a, b, c, d, und verbindet die Mittelpunkte je zweier Nachbar-Seiten durch gerade Linien, so erzeugt jede so gezogene Seite ab, bc, cd und da mit ihrer zugehörigen Diagonale zwei ähnliche Dreiecke Bab und BAC, Ddc und AAC, Ada und ADB, Ccb und CDB. Es sind daher die Linien ab und dc mit der ihnen zugehörigen Diagonale AC; da und cb mit BD, also auch unter sich parallel und hieraus folgt, daß die vier Linien, welche die Mittelpunkte der Seiten mit einander verbinden, ein Parallelogramm bilden.

Berücksichtigt man ferner, daß in den ähnlichen Dreiecken ABC folgende Proportion gilt

$$AB : aB = AC : ab$$

und daß $aB = \frac{1}{2} AB$ ist, so gilt auch folgende

$$AC : ab = AB : \frac{1}{2} AB = 1 : \frac{1}{2}$$

und ab ist also die Hälfte der ihr zugehörigen Diagonale. Was so eben von den Dreiecken ABC und aBb gesagt wurde, gilt auch von den Dreiecken ACD und dDc, ABD und Ada, DBC und cbC. Dieß führt zu dem Schlusse: daß die Seiten des auf obige Art in das Viereck geschriebenen Parallelogramms abcd die Hälften der beiden Diagonalen sind.

Verbindet man die Mittelpunkte je zweier gegenüberstehender Seiten durch die geraden Linien ac und bd, so bilden diese die beiden Diagonalen des mit seinen Winkelspitzen in den Mittelpunkten der Vierecksseiten liegenden Parallelogramms.

Diese Linien werden im Folgenden Halbirungslinien genannt werden.

Da die im Parallelogramme abcd gegenüberstehenden Seiten ab und cd und die Winkel y und y′, x und x′ als die ihnen anliegenden Wechselwinkel einander gleich sind, so folgt hieraus die Gleichheit der Dreiecke aeb und dec, also auch die Gleichheit der Linien ec und ea, eb und ed.

Hieraus rechtfertigt sich folgende Behauptung: die beiden Halbirungslinien ac und bd durchschneiden sich in ihrem beiderseitigen Mittelpunkte e.

§. 380.

Wird in einem Viereck ABCD Fig 433 eine Diagonale AC gezogen und diese halbirt und von ihrem Mittelpunkte f auf die Mittelpunkte a, b, c, d der Seiten die Linien fa, fb, fc, fd gezogen, so entstehen die ähnlichen Dreiecke Afa und ACB, Adf und ADC, Cfb und CAB, Ccf und CDA und diese führen zu folgenden Proportionen:

$$CB : fa = CA : Af = 2 : 1$$
$$DC : df = DA : dA = 2 : 1$$
$$AB : fb = CB : Cb = 2 : 1$$
$$AD : fc = DC : cC = 2 : 1$$

Dieß berechtigt zu folgenden Schlüssen:

1) Die Linie, welche von dem Mittelpunkte einer Diagonale auf den Mittelpunkt einer Seite gezogen wird, ist die Hälfte von derjenigen Viereckseite, welche zu der Diagonale und der genannten Seite die dritte Dreiecksseite bildet und geht mit ihr parallel.

Es ist also fa gleich und parallel mit Bb, fb gleich und parallel mit aB, fc gleich und parallel mit dD, df gleich und parallel mit Dc.

Hieraus folgt unmittelbar

2) Wenn von dem Mittelpunkte f einer Diagonale Linien auf die Mittelpunkte der vier Seiten gezogen werden, so entsteht auf beiden Seiten der Diagonale ein Parallelogramm, dessen Seiten die Hälften der beiden Nachbarseiten sind.

3) Die Winkel x, x', x'', x'''; y, y'; u, u', u'', u'''; z, z' sind unter sich gleich. Die Winkel, welche der Diagonale gegenüberstehen, kommen viermal vor, die Winkel, durch deren Spitze die Diagonale geht, kommen nur zweimal vor.

4) Jedes Parallelogramm enthält den Winkel, den die beiden Nachbarseiten, aus deren Hälften es gebildet wurde, einschließen.

5) Alle vier Winkel des Vierecks liegen am Mittelpunkte der Diagonale, und zwar die zwei, der Diagonale gegenüberstehenden, auf der ihnen zugehörigen Seite, die zwei aber, durch deren Spitze sie geht, auf der entgegengesetzten.

6) Die von dem Mittelpunkte einer Diagonale auf die Mittelpunkte der Seiten gezogenen Linien zerlegen das Viereck in zwei Parallelogramme aBbf und fcDd, und zwei Vierecke fbCc, Adfa, welche letztere der Parallelen wegen dem Vierecke ABCD ähnlich sind.

7) Da sich zwei ähnliche Figuren, wie die Quadrate, ähnlich liegender Seiten verhalten, so gewinnt man folgende Proportionen:

$$DCBA : dfaA = DC^2 : df^2 = DC^2 : (\tfrac{1}{2}DC)^2 = 1 : \tfrac{1}{4}$$

und $DCBA : cCbf = DC : cC = DC^2 : (\tfrac{1}{2}DC)^2 = 1 : \tfrac{1}{4}$

und es ist dadurch erwiesen, daß jedes von den beiden dem ganzen Vierecke ähnlichen Vierecken, der vierte Theil des ganzen ist, sie selbst aber unter sich congruent und zusammen der Hälfte des ganzen gleich sind.

8) Die beiden Parallelogramme fbBa und dDcf sind der Hälfte des ganzen Vierecks gleich.

9)

9) Die Dreiecke Aaf und fbC, Adf und fcC sind congruent und zusammen dem ihnen zugehörigen Parallelogramme gleich.

10) Das Parallelogramm abcd ist die Hälfte des Vierecks ABCD.

§. 381.

Verbindet man nun die Mittelpunkte der Seite durch die Linien ab, bc, cd, da, Fig. 433., so sind ab und dc die Hälften der Diagonale AC, ad und cb die Hälften der Diagonale DB, und es steht der Winkel cfb mit den Endpunkten seiner Schenkel über cb, und der Winkel dfa mit den Endpunkten seiner Schenkel über da; der Winkel dfc über dc und afb über ab auf. Da nun cfb = DAB, dfa = DCB, dfc = ADC, afb = ABC ist, so führt dieß zu folgenden Bemerkungen:

1) Die Winkel, durch deren Spitze eine Diagonale geht, haben ihre Spitzen im Mittelpunkte derselben liegen, und stehen mit den Endpunkten ihrer Schenkel auf den Endpunkten der zwei Parallelogrammseiten auf, welche der andern Diagonale zugehören.

Die Winkel, welche der Diagonale gegenüberstehen, haben ihre Spitzen gleichfalls im Mittelpunkte der Diagonale liegen, stehen aber mit den Endpunkten ihrer Schenkel, auf den zwei Parallelogrammseiten auf, welche der gegebenen Diagonale selbst zugehören.

Vereinigt man je zwei Nachbarwinkel, welche an dem Mittelpunkte einer Diagonale liegen, so hat man

$$dfb = dfc + cfb = ADC + DAB$$
$$cfa = cfb + bfa = DAB + ABC$$
$$bfd = bfa + afd = CBA + BCD$$
$$afc = afd + dfc = BCD + CDA$$

und dieß führt zu dem Schlusse:

2) Der Summenwinkel an dem Mittelpunkte einer Diagonale, welchen die Hälften

zweier gegenüberstehenden Seiten erzeugen, ist gleich der Summe der zwei Winkel, welche zwischen den beiden Seiten liegen, deren Hälften sie sind.

Diese Untersuchung kann man weiter fortsetzen und auch auf die Winkel ausdehnen, welche durch die Diagonalen und Seiten gebildet werden.

§. 382.

Wenn man Fig. 434. in dem Vierecke ABCD die beiden Diagonalen AC und DB zieht, ihre Mittelpunkte f und g sucht, und von jedem dieser Punkte auf die Mittelpunkte der vier Seiten die Linien fa, fb, fc, fd; ga, gb, gc, gd zieht, so gehen die Linien ga und fc mit AD, fa und gc mit BC parallel; also gehen auch die Linien fa und gc, ag und fc unter sich parallel. Das Nämliche gilt von den Linien df und gb, dg und fb; ferner sind die Linien ag und fc der Hälfte der Seite AD, fa und gc der Hälfte der Seite BC gleich. Das Nämliche gilt von den Linien dg, fb und AB; df, gb und DC. Hieraus folgt

1) Wenn von den Mittelpunkten der beiden Diagonalen Linien auf die Mittelpunkte je zweier gegenüberstehender Seiten gezogen werden, so entsteht ein Parallelogramm, dessen Seiten den Hälften der beiden andern Seiten gleich sind und dessen Nachbarseiten mit je zwei gegenüberstehenden Seiten des Vierecks parallel laufen.

2) Zieht man die beiden Halbirungslinien ac und bd, so bilden diese die Diagonalen der eben erzeugten Parallelogramme, die sich also in e halbiren.

3) Geht man von den Parallelogrammen agcf, fbgd auf das Viereck fkgm über, so ist wegen der Parallelen fm und kg, fk und mg auch dieses ein Parallelogramm. Zieht man nun die Diagonale fg, so muß sie gleichfalls durch den Punkt e gehen, da sie eine Diagonale des Parallelogrammes agfc ist. Hieraus folgt, daß die Mittelpunkte der Diagonalen und Halbirungs-Linien in einer geraden Linie liegen, und der Mittelpunkt der Halbirungslinien gleichweit von den Mittelpunkten der Diagonalen entfernt ist.

4) Da die Linie gc mit BC und fc mit AD parallel geht, so ist der Winkel $BCD = p + q$ und $ADC = r + q$. Aus dem nämlichen Grunde ist

$$CBA = u' \text{ und } DAB = z'$$

Zählt man jedes Paar dieser Gleichungen zusammen, so hat man

$$BCD + ADC = p + q + r + q$$

oder, da $p + q + r = 2R$ sind,

$$1) \quad BCD + ADC = 2R + q$$

ferner

$$CBA + DAB = u' + z'$$

oder, da $u' + q' + z' = 2R$ sind,

$$2) \quad CBA + DAB = 2R - q'$$

Aus diesen zwei Gleichungen ergeben sich folgende

$$3) \quad q = BCD + ADC - 2R$$

$$4) \quad q' = 2R - (CBA + DAB)$$

Berücksichtigt man, daß q der Winkel im Parallelogramme agcf und ACD + ADC, CBA und ADC die Summe der an den gegenüberstehenden Seiten liegenden Winkel sind, so folgt hieraus: der Winkel in dem Parallelogramme, welches aus einer Halbirungs-Linie und den Hälften zweier gegenüberstehenden Seiten gebildet wird und durch dessen Spitze die Halbirungs-Linie geht, ist gleich dem Ueberschuße über zwei Rechte, oder dem Ergänzungswinkel zu zwei Rechten, und der Summe der zwei Winkel, welche der halbirten Seite anliegen.

6) Da nun $q = q'$ ist, so ergänzen sich, wie natürlich, die Summen der zwei, den gegenüberstehenden Seiten anliegenden Winkel, zu vier Rechten, und um soviel als das eine Paar größer ist, als zwei Rechte, um soviel ist das andere kleiner und umgekehrt.

§. 383.

Aufgabe. Es sind drei Seiten, ein eingeschlossener Winkel und der diesem im Vierecke gegenüberstehende Winkel gegeben. Man soll daraus das Viereck bilden. Fig. 435.

Auflösung. Die drei Seiten seyen AB, BC und AD,

der von AD und AB eingeschlossene Winkel x, der diesem gegenüberstehende Winkel y. Man bilde aus den Linien AB, AD und dem Winkel x das Dreieck ABD, beschreibe über der Linie BD einen Kreisbogen, der den Winkel y faßt, lege von dem einen Endpunkte B der Linie BD die dritte Linie BC, als Sehne, in diesen Kreisbogen, und ziehe die Linie CD, so ist ABCD das gesuchte Viereck.

Der Beweis ist leicht.

Anmerkung. Da die Auflösung dieser Aufgabe auf der Construction des Dreiecks BDC aus zwei Linien und einem gegenüberstehenden Winkel beruht, so sieht man leicht ein, daß die Aufgabe so lange unbestimmt ist und also zwei Vierecke zuläßt, als nach §. 233. die dort gegebene Aufgabe unbestimmt ist. Die zwei Vierecke, die hier möglich werden, sind ABCD und ABC'D.

§. 384.

Aufgabe. Es sind drei Seiten und die an der vierten anliegenden Winkel gegeben. Man soll daraus ein Viereck bilden.

Erste Auflösung. Fig. 436. Die Seiten seyen A'B', B'C' und C'D' und der an der Seite A'B' liegende Winkel x, der an C'D' liegende y. Man nehme irgend eine willkührliche Linie Ab an und lege an den Endpunkt A den Winkel BAD = x und trage auf seinen Schenkel die Seite AB = A'B', an den andern b trage man den Winkel Abe = x und auf seinen Schenkel die Seite eb = D'C'. Von dem Endpunkte B beschreibe man mit der dritten Seite BC = B'C', als Radius, einen Kreisbogen, ziehe eC parallel mit AD bis zum Durchschnitte C dieses Kreisbogens und ziehe von C die Linie CD parallel mit eb, so ist ABCD das gesuchte Viereck.

Der Beweis führt sich leicht.

Zweite Auflösung. Fig. 437. Man bilde aus der Ergänzung der zwei Winkel x und y zu zwei Rechten, also aus edf = 2 R — (x + y) den Hälften der an der vierten anliegenden Seiten ed = $\frac{1}{2}$ C'D' und df = $\frac{1}{2}$ B'A' das Parallelogramm debf und lege in dem Punkte e auf den Schen-

kel ed den Winkel ced = y und von f aus trage man fc = $\frac{1}{2}$B'C' an, vollende mit den Seiten fc und ec das Parallelogramm afce; nun lege man durch den Punkt c die Linie CD parallel mit bf, durch b die Linie BC parallel mit fc, durch den Punkt a die Linie BA parallel mit be und mache CD = C'D' und AB = A'B', ziehe AD, so ist ABCD das gesuchte Viereck.

Beweis. Nach der Construction läuft die Linie BC parallel mit fc und CD mit bf, also ist das Viereck bCcf ein Parallelogramm und die Linie bf = Cc, bC = fc. Eben so geht AB mit be und ae mit Bb parallel, also ist auch Bbea ein Parallelogramm und es ist Bb = ae und aB = be. Nun ist auch fc = ae, weil afce ein Parallelogramm ist und fc = $\frac{1}{2}$B'C'. Hieraus folgt also auch, daß

$$ae + fc = Bb + bC = BC = B'C'$$

ist. Nach der Construction ist CD = C'D' und BA = B'A', also enthält das Viereck die gegebenen Seiten.

Da die Linie CD der Linie ed gleich und parallel ist, so folgt, daß edDC ein Parallelogramm und der Winkel deC = dDc ist, da aber dec = y, so ist auch

$$ADC = y$$

Die Winkel edD und dDc sind zusammen zweien Rechten gleich. Zieht man nun den Winkel bei D und den Winkel edf von zwei Rechten ab, so bleibt der Winkel fdD übrig und es ist der Winkel

$$fdD = 2\,R - y - [2\,R - (x + y)] = x$$

oder, da fd mit AB parallel geht, der Winkel

$$BAD = fdD = x$$

Das Viereck ABCD enthält also auch die gegebenen Winkel.

§. 385.

Aufgabe. Es sind drei Winkel und zwei gegenüberstehende Seiten gegeben. Man soll daraus ein Viereck bilden.

Erste Auflösung. Fig. 436. Die Seiten seyen A'B' und C'D', die an A'B' anliegenden Winkel x und z, der an

dem Punkte D der Seite D'C' anliegende Winkel y. Man nehme irgend eine Linie Ab an und trage an A den Winkel BAb = x und an b den Winkel Abe = y, mache AB = A'B', trage ferner an B den Winkel ABC = z und ziehe den Schenkel BC unbestimmt, mache be = CD, ziehe eC parallel mit AD bis zum Durchschnitte C mit dem Schenkel BC, und ziehe dann CB parallel mit eb, so ist ABCD das gesuchte Viereck.

Zweite Auflösung. Fig. 437. Man lege an irgend einen Punkt d einer Linie AD den Winkel fdD = x und edA = y und mache ed = $\frac{1}{2}$ CD' und df = $\frac{1}{2}$ A'B', vollende das Parallelogramm debf, trage an den Punkt e den Winkel dec = y und an f den Winkel dfc = z, verlängere beide Schenkel bis zum Durchschnitte c und vollende das Parallelogramm aefc. Nun beschreibe man mit bf und fc das Parallelogramm bCcf und mit ae und eb das Parallelogramm aBbe, mache BA = B'A', CD = C'D' und ziehe AD, so ist ABCD das gesuchte Viereck.

Beweis. Aus der Construction folgt unmittelbar, daß CD = C'D' und AB = A'B' ist. Da die Linie fc mit bC oder BC und fd mit AB parallel geht, so ist der Winkel dfc = ABC, der Winkel dfc ist aber nach der Construction dem Winkel z gleich, also ist auch der Winkel ABC dem gegebenen Winkel z gleich. Da CD mit bf und bf mit ed parallel geht, so geht auch CD mit ed parallel und es ist der Winkel edA = ADC; da aber edA = y ist, so ist auch eDA = y. Auf gleiche Weise zeigt man, daß der Winkel BAD = fdD = x ist. Das Viereck ABCD erfüllt also die aufgestellten Bedingungen.

§. 386.

Aufgabe. Es sind zwei anliegende Seiten, der von ihnen eingeschlossene und der diesem gegenüberstehende Winkel uud die Diagonale, welche die Spitzen der beiden Winkel verbindet, gegeben. Man soll daraus ein Viereck bilden. Fig. 438.

Auflösung. Die Seiten seyen A'D' und D'C', der von ihnen eingeschlossene Winkel x, der gegenüberstehende y und die Diagonale D'B'. Man bilde aus AD = A'D', DC = D'C' und dem Winkel y = ADC das Dreieck ADC, beschreibe über AC einen Kreisbogen ABC, der den Winkel y faßt, nnd beschreibe von D aus mit dem Radius DB = D'B' einen Kreisbogen, welcher den ersten in B durchschneidet, ziehe dann AB, BC und BD, so ist ABCD das gesuchte Viereck, denn es enthält die gegebenen Stücke nach der Forderung der Aufgabe.

Anmerkung. Die Aufgabe wird unmöglich, wenn die Diagonale D'B' so klein oder so groß ist, daß sie den Kreisbogen ABC weder durchschneidet noch berührt. Sind zwei Durchschnitte möglich, so entstehen auch zwei, jedoch congruente, Vierecke ABCD und AB'CD.

§. 387.

Aufgabe. Es ist eine Diagonale, eine Seite und es sind drei Winkel gegeben. Man soll daraus ein Viereck bilden. Fig. 439.

Auflösung. Die gegebene Seite sey A'B', die Diagonale A'C', der an dem Punkt A liegende Winkel sey x, der an B und der Diagonale gegenüber liegende y, der an C liegende Winkel z. Man bilde aus der Seite AB = A'B' und dem Winkel y = ABC und der diesem Winkel gegenüber liegenden Diagonale AC = A'C' nach §. 233. das Dreieck ABC, lege an die Endpunkte C und A die ihnen zugehörigen Winkel z und x, verlängere ihre Schenkel bis zu ihrem Durchschnitte in D, so ist ABCD das gesuchte Viereck; denn es enthält die gegebene Seite, Diagonale und die den gegebenen Punkten A, B und C zugehörigen Winkel.

Anmerkung. 1) Da die Construction des Vierecks ABCD auf der Bildung des Dreiecks ABC beruht und die Bildung dieses Dreiecks nach §. 233. in gewissen Fällen unbestimmt ist, so ist klar, daß auch das Viereck in manchen Fällen unbestimmt seyn wird und zwar immer dann, wann mit der Diagonale AC zwei Durchschnitte C und C' in der Linie BC möglich sind. Es werden dann die beiden Vierecke ABCD und ABC'D' möglich seyn, die beide den Anforderungen der Aufgabe genügen. Die Aufgabe ist dann bestimmt,

wenn angegeben ist, ob der Umfang des Vierecks der größte oder kleinste möglich seyn soll.

2) Ist der Winkel bei D statt des Winkels bei C gegeben, so läßt sich durch die drei gegebenen Winkel bei A, B und D die Größe des Vierten bestimmen und auf die angegebene Art verfahren.

§. 388.

Aufgabe. Es sind zwei Diagonalen, zwei anliegende Seiten und der, von den nicht gegebenen Seiten eingeschlossene Winkel gegeben. Man soll daraus ein Viereck bilden. Fig. 438.

Auflösung. Die Diagonalen seyen A'C' und D'B', die anliegenden Seiten A'D' und D'C', die ihnen zugehörige Diagonale AC und der Winkel bei B = x. Man bilde aus der Diagonale AC = A'C' und den Seiten AD = A'D', DC = D'C' das Dreieck ADC, beschreibe über AC einen Kreisbogen, der den Winkel x faßt, und von D mit der zweiten Diagonale, als Radius, einen zweiten Kreisbogen, welcher den ersten in B durchschneidet, ziehe AB und BC, so ist ABCD das gesuchte Viereck, denn es enthält die gegebenen Seiten und Diagonalen und den gegebenen Winkel nach den Forderungen der Aufgabe.

Anmerkung. Auch hier gelten die zu §. 386. gemachten Bemerkungen.

§. 389.

Aufgabe. Es sind die beiden Diagonalen, zwei gegenüberstehende Seiten und die Summe der an einer der beiden andern Seiten anliegenden Winkel gegeben. Man soll daraus ein Viereck bilden. Fig. 440.

Auflösung. Die gegebenen Seiten seyen AB und DC, die Diagonalen BD und AC, die Summe der an der nicht gegebenen Seite AD liegenden Winkel A und D, sey y und größer als zwei Rechte. Man bilde aus dem Ueberschuße des Winkels über zwei Rechten dfb = y — 2 R = m und den beiden Hälften der gegebenen Seiten-Linien $\frac{1}{2}$DC = df und

$\frac{1}{2}$ AB = ed ein Parallelogramm debf nach §. 352. und von den Punkten d und b aus mit den Hälften der beiden Diagonalen ab = $\frac{1}{2}$AC und ad = $\frac{1}{2}$BD das Parallelogramm abcd. Nun lege man durch den Punkt a mit der Linie ed die Seite AB so parallel, daß ihr Mittelpunkt in den Punkt a fällt, eben so durch den Punkt c mit der Linie df die Seite DC parallel, daß ihr Mittelpunkt in den Punkt c fällt, verbinde die Endpunkte C und B, A und D durch gerade Linien BC und AD, so ist das hiedurch entstandene Viereck ABCD das gesuchte.

Beweis. Die Seite DC ist mit der Linie df parallel gezogen, also ist der Winkel bei D = q + m, eben so ist die Linie AB mit de parallel gezogen, also ist BAD = m + p. Nun ist der gegebene Winkel y = 2 R + m und ferner sind die drei Winkel q, m und p über der geraden Linie AD zwei Rechte, also ist auch

$$y = q + m + p + m$$

ferner sind die beiden Winkel bei A und D zusammen den Winkeln q + m p + m und ihre Summe aber dem gegebenen Winkel y gleich, also sind sie auch dem gegebenen Summenwinkel gleich.

Zieht man nun in dem gegebenen Vierecke die Diagonale BD, so entsteht dadurch das Dreieck BDC, worin die Linie eb nach der Construction die beideu Seiten BD und BC parallel durchschneidet, daher verhält sich in demselben

$$Be : eb = BD : DC$$

Da nun eb = df die Hälfte von DC ist, so theilt auch der Schnittpunkt e die Linie BD in zwei Theile, ferner sind eb und Dc parallel und gleich, schließen auch gleiche und parallele Seiten ein und es folgt, daß eD = bc ist. Es ist aber bc die Hälfte der gegebenen Diagonale BD, also ist auch die Linie BD der gegebenen Diagonale gleich. Da bc mit ed oder BD parallel läuft, so fließt hieraus in den Dreiecken bcC und BDC folgende Proportion

$$bc : BC = Cc : CD$$

also ist bC die Hälfte von BC und folglich fällt auch die Seite BC in den Punkt b, und zwar in ihren Mittelpunkt, folglich

liegen die drei Punkte B, b, C in gerader Linie. Auf gleiche Weise zeigt man, daß AC das Doppelte von de $= \frac{1}{2}$AC ist, daß sie der gegebenen Diagonale gleich ist, daß die drei Punkte A, d, D in gerader Linie liegen und der Punkt d der Mittelpunkt der Seite AD ist, und daß folglich das Viereck ABCD die aufgestellten Bedingungen erfüllt.

§. 390.

Aufgabe. Es sind zwei Diagonalen, zwei gegenüberstehende Seiten und die sie halbirende Linie gegeben. Man soll daraus ein Viereck bilden. Fig. 441.

Auflösung. Die Diagonalen seyen BD und AC, die Seiten BC und AD und die Halbirungslinie db. Man bilde aus der Halbirungslinie, als Diagonale, und den Hälften der beiden Diagonalen ab $= \frac{1}{2}$AC und ad $= \frac{1}{2}$BD das Parallelogramm abcd, ziehe zu diesem die zweite Diagonale ac und bilde aus dieser und den Hälften der gegebenen Seiten gc $= \frac{1}{2}$BC und ag $= \frac{1}{2}$AD das Parallelogramm agck und mit der Seite gc die Seite BC durch den Punkt b parallel, so daß ihr Mittelpunkt in diesen Punkt fällt, und durch d die Linie AD mit ag oder kc parallel, so daß ihr Mittelpunkt in den Punkt d fällt, ziehe CD und AB, so ist ABCD das gesuchte Viereck.

Beweis. Nach der Construction halbirt die Linie bd die beiden Seiten BC und AD, demnach sind zwei gegenüberstehende Seiten und ihre Halbirungslinie in dem gefundenen Viereck enthalten.

Nun ziehe man die Diagonale BD und AC, so ist zu beweisen, daß diese Linien den gegebenen Linien gleich seyen. Da die Linie gc mit BC parallel geht, so werden die Seiten des Dreiecks BCD durch die Linie gc parallel geschnitten und es verhält sich also

$$BC : BD = gc : gD$$

Da aber gc die Hälfte von BC ist, so ist auch gD die Hälfte von BD und der Punkt g halbirt also die Linie BD.

Nun sind die Linien gc und Bb parallel und gleich; also ist auch die Linie Bg der Linie bc parallel und gleich. Da nun bc = $\frac{1}{2}$ BD und Bg = bc ist, so ist also die gezogene Diagonale BD der gegebenen gleich. Auf gleiche Weise zeigt man, daß AC = 2 . dc = 2 . $\frac{1}{2}$ AC ist.

Da endlich bc parallel mit Bg oder BD geht, so verhält sich in den Dreiecken BCD und bcC

BC : CD = Cb : Cc

Hieraus fließt, daß der Punkt c mit C und D in einerlei Richtung liegt und daß c der Mittelpunkt von C und D ist. Eben so zeigt man, daß die Punkte B, a, A in einerlei Richtung liegen und daß a der Mittelpunkt von den Punkten B und A ist. Es folgt also, daß das Viereck ABCD den Bedingungen der Aufgabe genügt.

§. 391.

Aufgabe. Es sind die zwei Diagonalen, zwei gegenüberstehende Seiten und die den beiden andern zugehörige Halbirungslinie gegeben. Man soll daraus ein Viereck bilden. Fig. 442.

Auflösung. Die Seiten seyen B'C' und A'D', die Diagonalen B'D' und A'C', die Halbirungslinie a'c'. Man bilde aus ac = a'c', als Diagonale, und gc = $\frac{1}{2}$ B'C' und ag = $\frac{1}{2}$ A'D', als Seiten, das Parallelogramm agck, dann bilde man aus der nämlichen Linie ac, als Diagonale, und den Hälften der beiden Diagonalen ab = $\frac{1}{2}$ A'C' und bc = $\frac{1}{2}$ B'D', als Seiten, das Parallelogramm abcd. Nun lege man durch den auf der einen Seite der Halbirungslinie ac liegenden Punkt b die Linie BC = B'C' mit gc parallel, so daß ihr Mittelpunkt in den Punkt b zu liegen kommt, und auf der andern Seite durch den Punkt d die Linie AD = A'D' so daß sie mit kc parallel geht und ihr Mittelpunkt in den Punkt d zu liegen kommt, ziehe dann die Linien CD und AB, so ist ABCD das gesuchte Viereck.

Beweis. Das Viereck ABCD enthält die beiden gegebenen Linien AD und BC. Nun ist ferner zu beweisen, daß

auch seine Diagonalen BD und AC den gegebenen Linien A'C' und B'D' gleich sind und daß die Punkte a und c der Halbirungslinie ac in die Mitte der Seiten AB und CD fallen. Man ziehe daher BD und AC. Die Linie kc = ag = ½A'D' geht mit AD parallel, also ergibt sich aus den Dreiecken Ckc und CAD folgende Proportion

$$CA : ck = AD : kc$$

Da nun kc die Hälfte von AD ist, so ist auch kC die Hälfte von AC und Ak = kC, oder der Punkt k halbirt die Linie AC und der Punkt k liegt also auch in der Linie AC. Aus den nämlichen Gründen, wie oben, fließt folgende Proportion

$$CA : Ck = CD : Cc$$

Da nun die Linie Ck die Hälfte von CA ist, so ist auch Cc die Hälfte von CD, also theilt der Punkt c die Seite CD in zwei gleiche Theile und liegt auch in der Seite CD.

Auf gleiche Weise zeigt man, daß der Punkt a die Seite AB in zwei gleiche Theile theilt und daß er also selbst in der Linie AB liege. Da nun a und c die Endpunkte der ihr gleichen Linie a'c' sind, so enthält also auch das Viereck ABCD die gegebene Halbirungslinie a'c'.

So eben wurde gezeigt, daß der Punkt c die Linie CD halbire; bekannt ist, daß der Punkt d die Linie AD halbirt, hieraus folgt unter den Seiten des Dreiecks ACD die Proportion

$$Dd : Dc = Ad : Cc$$

Die Punkte d und c sind durch die Linie dc verbunden, und dieß führt zu dem Schlusse, daß die Linie dc mit AC parallel geht, wodurch man folgende Proportion gewinnt

$$AD : AC = dD : dc$$

Da aber Dd die Hälfte von AD ist, so ist auch dc die Hälfte von AC. Die Linie dc aber ist nach der Construction auch die Hälfte von der gegebenen Linie A'C' und hieraus folgt, daß die Diagonale AC der Linie A'C' gleich ist. Auf gleiche Weise zeigt man, daß bc oder ad die Hälfte von BD ist, woraus die Gleichheit der Linie BD und B'D' folgt.

Aus diesen Bemerkungen ergibt sich, daß das Viereck ABCD die aufgestellten Bedingungen erfüllt.

§. 392.

Aufgabe. Es sind drei Seiten und die zwei Diagonalen gegeben. Man soll daraus ein Viereck bilden. Fig. 443.

Auflösung. Die Seiten seyen B'C', C'D', A'D', die den Seiten B'C' und C'D' zugehörige Diagonale B'D', die andere A'C'. Man bilde aus der Diagonale BD = B'D' und den ihr zugehörigen Seiten BC = B'C' und CD = C'D' das Dreieck BCD, und auf der Linie CD mit der Diagonale AC = A'C' und der Seite AD = A'D' das Dreieck ACD, verbinde die beiden Punkte B und A durch eine gerade Linie AB, so ist ABCD das gesuchte Viereck.

Anmerkung. Die Aufgabe ist so lange unbestimmt, als nicht angegeben ist, welche Diagonale und Seite zusammen gehören.

§. 393.

Aufgabe. Es sind eine Diagonale, drei Seiten und die den zwei gegenüberstehenden Linien zugehörige Halbirungslinie gegeben. Man soll daraus ein Viereck bilden. Fig. 444.

Auflösung. Die Seiten seyen B'C', C'D', A'D', die den Seiten B'C' und A'D' zugehörige Halbirungslinie b'd', die den Seiten A'D' und D'C' zugehörige Diagonale sey A'C'. Man bilde aus AC = A'C', AD = A'D', DC = D'C' das Dreieck ADC, und beschreibe mit der Hälfte von der dritten Seite Cb = $\frac{1}{2}$B'C' und von der Mitte d der Linie AD mit db = d'b' zwei sich durchschneidende Kreisbogen und lege durch ihren Durchschnittspunkt b die dritte Seite CB = C'B', ziehe AB, so ist ABCD das gesuchte Viereck.

Beweis. Die Seiten BC, CD und AD und die Diagonale AC sind den gegebenen Linien B'C', C'D', A'D', A'C' gleich, ferner halbirt die Linie bd die gegenüberstehenden Seiten AD und BC und ist der Linie bd gleich. Demnach entspricht das Viereck ABCD den aufgestellten Bedingungen.

Anmerkung. Die Aufgabe ist so lange unbestimmt, als nicht angegeben ist, welchen Seiten die Diagonale zugehört.

§. 394.

Aufgabe. Es sind drei Seiten, eine Diagonale und die der vierten Seite zugehörige Halbirungslinie gegeben. Man soll daraus ein Viereck bilden. Fig. 445.

Auflösung. Die drei Seiten seyen B'C', C'D', A'D', die den Seiten A'D' und C'D' zugehörige Diagonale A'D', die Halbirungslinie a'c'. Man bilde aus der Diagonale AC = A'C' und den Seiten AD = A'D', CD = C'D' das Dreieck ACD, halbire die Diagonale AC in k und die Seite CD in c, beschreibe von k aus mit der Hälfte der dritten Seite ak = $\frac{1}{2}$B'C' und von c, dem Mittelpunkte von CD, mit der Halbirungslinie ac = a'c' zwei sich durchschneidende Kreisbogen, ziehe durch ihren Durchschnittspunkt a eine unbestimmte Linie und lege von C aus die dritte Seite CB = C'B' bis zum Durchschnitte B mit der Linie AaB, so ist ABCD das gesuchte Viereck.

Beweis. Aus der Construction fließt unmittelbar, daß das Viereck die Seite AD = A'D', DC = D'C', BC = B'C', die Diagonale AC = A'C' und die Halbirungslinie ac = a'c' enthält. Es ist daher nur noch zu beweisen, daß der Punkt a in der Mitte zwischen A und B liegt, oder daß die Linie ca auch die Seite AB in a halbirt.

In den beiden Dreiecken Aka und ACB ist nach der Construction Ak die Hälfte von AC und ak die Hälfte von BC, hieraus folgt die Proportion

AC : BC = Ak : ka

ferner haben die beiden Dreiecke den Winkel BAC gemeinschaftlich und hieraus folgt die Aehnlichkeit beider Dreiecke. Aus ihrer Aehnlichkeit leitet sich auch folgende Proportion her

AB : Aa = BC : ak

Da aber ak die Hälfte von BC ist, so ist auch Aa die Hälfte

von AB und demnach theilt also der Endpunkt a die Seite AB in zwei gleiche Theile. Das Viereck ABCD erfüllt also die aufgestellten Bedingungen.

§. 395.

Aufgabe. Es sind die zwei Halbirungslinien, zwei Nachbar-Seiten und die Diagonale, welche durch den Vereinigungspunkt beider Seiten geht, gegeben. Man soll daraus ein Viereck bilden. Fig. 446.

Auflösung. Die Halbirungslinien seyen a'c' und d'b', die Seiten A'B' und A'D', die Diagonale A'C'. Man halbire die gegebene Diagonale und bilde aus ihrer Hälfte $\frac{1}{2}$A'C' = dc und den Hälften der beiden Halbirungslinien dm = $\frac{1}{2}$d'b' und cm = $\frac{1}{2}$c'a' das Dreieck dmc, verlängere die beiden Seiten dm und mc durch m und mache db = d'b' und ca = c'a'; von den Endpunkten a und d der Halbirungs-Linien ca und bd aus bilde man mit den Hälften der gegebenen Seiten Aa = $\frac{1}{2}$A'B' und Ad = $\frac{1}{2}$ AD das Viereck Aamd, mache AB = A'B' und AD = A'D' und ziehe durch die Punkte b und c die Linien BC und DC bis zu ihrem Durchschnitte in C, so ist ABCD das gesuchte Viereck.

Beweis. Man ziehe die Diagonale BD und die Hülfs-Linien ad, BD und bc. In dem Dreiecke ABD sind die Seiten AB und AD durch die Linie ad so getheilt, daß die beiden Abschnitte einander gleich sind; beide Dreiecke haben den Winkel bei A gemeinschaftlich, also sind sie einander ähnlich und folglich sind die beiden Linien ad und BD parallel. Die beiden Dreiecke amd und bmc, sind wegen der gleichen Seiten und der Scheitelwinkel amd und bmc congruent, also ist bc nicht nur zu ad parallel, sondern auch ihr gleich. Hieraus folgt nun, daß die Linien ad, BD und bc mit einander parallel laufen.

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke Aad und ABD folgt die Proportion Aa : ad = AB : BD

Da Aa die Hälfte von AB ist, so ist auch ad die Hälfte von BD und hieraus folgt auch, da bc = ad ist, daß bc die Hälfte von BD ist. Da nun in dem Dreiecke BCD die Linie bc parallel zu BD und die Hälfte von ihr ist, so führt dieß zu dem Schlusse, daß sie die beiden Seiten BC und CD in den Punkten b und c in gleiche Theile theilt, und daß folglich Bb = bC, Cc = cD ist. Aus diesen Bemerkungen geht hervor, daß die Linien ac und bd, welche den gegebenen Halbirungslinien gleichen, die vier Seiten des Vierecks halbiren.

Nun ist noch zu beweisen, daß die Diagonale AC der gegebenen Linie A'C' gleich ist. Dieß folgt leicht aus der Aehnlichkeit der Dreiecke Ddc und DAC und es ist

$$Dd : DA = dc : AC$$

Da nun DA doppelt so groß, als Dd ist, so ist auch AC doppelt so groß als dc. Die Linie dc ist die Hälfte der gegebenen Diagonale, also ist die Diagonale AC = A'C'. Da nun AB = A'B' und AD = A'D' ist, so erfüllt das Viereck ABCD die aufgestellten Bedingungen.

§. 396.

Aufgabe. Es sind zwei Nachbar-Seiten, der von ihnen eingeschlossene Winkel, die durch ihre Spitze gehende Diagonale und eine Halbirungslinie gegeben. Man soll daraus ein Viereck bilden. Fig. 447.

Auflösung. Die Seiten seyen A'D', D'C', der eingeschlossene Winkel x, die Diagonale D'B', die Halbirungs-Linie d'b'. Man bilde aus A'D' = AD, DC = D'C' und dem Winkel ADC = x das Dreieck ADC, halbire die Seiten AD und DC, verbinde ihre Mittelpunkte d und c durch die Linie dc, bilde über ihr mit der Halbirungslinie db = d'b' und der Hälfte der gegebenen Diagonale bc = $\frac{1}{2}$B'D' das Dreieck dbc, ziehe von C durch den Punkt b die Linie CbB so, daß bB = bC ist und dann ziehe man AB, so ist ABCD das gesuchte Viereck.

Beweis.

Beweis. Da AD = A'D' und DC = D'C' und ADC = x ist, so enthält das Viereck die genannten drei Stücke. Nach der Construction ist bC = Bb und Cc = cD und diese Linien bilden in zwei Dreiecken, welche den Winkel bei C gemeinschaftlich haben, die Abschnitte der Seiten, also sind die Dreiecke Cbc und CBD ähnlich und es gilt folgende Proportion

$$Cc : bc = CD : BD$$

Da nun CD doppelt so groß als Cc ist, so ist auch BD doppelt so groß als bc, die Linie bc ist der Hälfte der gegebenen Diagonale B'D' gleich, also ist auch BD = B'D', folglich enthält auch das Viereck ABCD die gegebene Diagonale. Die Linie db ist der Halbirungslinie d'b' gleich und halbirt auch die Seiten AD und BC in d und b, also entspricht das Viereck ABCD den aufgestellten Bedingungen.

§. 397.

Aufgabe. Es sind zwei Diagonalen, eine Halbirungs-Linie und zwei gegenüberstehende Winkel gegeben. Man soll daraus ein Viereck bilden. Fig. 448.

Auflösung. Die Diagonalen seyen B'D' und A'C', die letzterer gegenüberstehenden Winkel x und y, die Halbirungs-Linie b'd'. Man bilde aus der Halbirungslinie, als Diagonale, db = d'b' und den Hälften der beiden Diagonalen dc = $\frac{1}{2}$A'C', bc = $\frac{1}{2}$ B'D' das Parallelogramm abcd und beschreibe über der Linie dc einen Kreisbogen dPbc, der den Winkel dPc = x und über der gegenüberstehenden Parallele ab einen Kreisbogen aPb, der den Winkel aPb = y faßt und den ersten Kreisbogen dPbc berührt oder schneidet, ziehe von dem Berührungs- oder Durchschnittspunkte P auf die Endpunkte der Linien ab und dc die Linien Pb, Pa, Pd, Pc, und nun ziehe man mit Pc die Linie BC durch b, mit Pd die Linie BA durch a und mit aP die Linie AD durch d, und mit Pb die Linie DC durch c bis zu ihren Durchschnitten parallel, so ist ABCD das gesuchte Viereck.

Beweis. Da die Linie Bb mit Pc und Dc mit Pb parallel geht, so sind die correspondirenden Winkel einander gleich und die Dreiecke BPb und PcD ähnlich, und man gewinnt die Proportion

$$Bb : Pb = Pc : Dc$$

Da Pb mit Cc und PC mit bC parallel geht, so ist PbCc ein Parallelogramm und die gegenüberstehenden Seiten einander gleich, also

$$Pc = bC \text{ und } Pb = cC$$

Setzt man diese Werthe in obige Proportion, so geht sie durch Versetzung in folgende über

$$Bb : bC = Cc : Dc$$

Diese Linien sind die Abschnitte der Seiten BC und CD in dem Dreiecke BCD, da sie nun in einer Proportion stehen, so folgt daraus, daß die sie verbindende Linie bc mit BD parallel geht. Hieraus folgt ferner, daß nicht nur PbCc, sondern auch PbcD ein Parallelogramm ist und daß also $Pb = Cc$, $Pb = cD$ und $Cc = cD$ ist. Eben so, da PbCc und PBbc Parallelogramme sind, die auf der gemeinschaftlichen Linie Pc aufstehen, daß auch $Bb = bC$ ist. Endlich daß auch PbcD und PBbc Parallelogramme sind, welche der Linie bc zugehören und daß folglich $BP = PD$ ist.

Auf gleiche Weise beweist man, daß $Ba = Aa$ und $Ad = dD$ ist. Hieraus folgt, daß die Punkte a, b, c, d die Seiten halbiren, daß die Halbirungslinie $db = d'b'$ ist und auf der Mitte der Seiten AD und BC aufsteht.

Da nun $bc = PD = PB$ ist, so ist

$$2\,bc = BP + PD = BD$$

und da bc die Hälfte von der Diagonale $B'D'$ ist, so folgt hieraus, daß $2\,bc = BD = B'D'$ ist.
Eben so beweist man, daß $AC = 2\,dc = A'C'$ ist. Hieraus folgt, daß das Viereck ABCD auch die beiden gegebenen Diagonalen enthält.

Da die Linie dP mit AB und Pc mit BC parallel geht, so ist der Winkel $ABC = dPc$. Eben so ist der Winkel $aPb = ADC$; also enthält auch das Viereck ABCD die, der Diagonale entgegenstehenden, Winkel und erfüllt die Bedingung der Aufgabe.

Anmerkung. Die Aufgabe wird unmöglich, wenn die Winkel so beschaffen sind, daß sich ihre Bogen nicht schneiden oder berühren. Der Punkt P muß immer so fallen, daß BPD eine gerade Linie

bildet, die parallel mit bc und ad geht. Durchschneiden sich die beiden Bogen innerhalb des Parallelogramms abcd in zwei Punkten, so sind zwei auflösende Vierecke möglich.

§. 398.

Aufgabe. Es sind die beiden Diagonalen, eine Halbirungslinie und zwei an einer Seite liegende Winkel gegeben. Man soll daraus ein Viereck bilden. Fig. 449.

Auflösung. Die Diagonalen seyen B'D' und A'C', die Halbirungslinie b'd', die an der Linie AB anliegenden Winkel seyen x und y. Man bilde aus der Halbirungslinie bd = b'd' und den Hälften der beiden Diagonalen bc = $\frac{1}{2}$B'D' und dc = $\frac{1}{2}$A'C' das Parallelogramm abcd, beschreibe über ad einen Kreisbogen aPd, welcher den Winkel aB = x, und über dc den Kreisbogen dPc, welcher den Winkel y faßt, ziehe von dem Vereinigungspunkte P der beiden Winkel die Linien Pb und Pa, Pd und Pc auf die Spitzen des Parallelogramms, und mit Pc die Linie BC durch den Punkt b, mit Pb durch den Punkt c die Linie CD, mit aP die Linie AD durch den Punkt d, mit Pd die Linie AB durch a parallel, so ist ABCD das gesuchte Viereck.

Beweis. Es zeigt sich auf die nämliche Weise, wie im vorigen §, daß BD und AC den gegebenen Diagonalen gleich sind, daß die Punkte a, b, c, d in der Mitte der Seiten AB, BC, CD, DA liegen, daß folglich db die Mittelpunkte der Seiten BC und AD verbindet und der Linie b'd' gleich ist, daß endlich der Winkel BAD = aPd = x und der Winkel ABC = dPc = y ist und also das Viereck die gegebenen Bedingungen erfüllt.

§. 399.

Aufgabe. Es sind die beiden Diagonalen, eine Halbirungslinie, die ihr nicht zugehörige Seite und die Summe zweier nicht anliegenden Winkel gegeben. Man soll daraus ein Viereck bilden. Fig. 450.

Auflösung. Die Diagonalen seyen A′C′ und B′D′, die Halbirungslinie b′d′, die gegebene Seite C′D′, die Summe der Winkel bei A und D sey p, größer als 2 R. Man bilde aus der Halbirungslinie bd = b′d′, als Diagonale, und den Hälften der gegebenen Diagonalen ad = $\frac{1}{2}$ B′D′ und dc = $\frac{1}{2}$ A′C′ das Parallelogramm abcd. Nun beschreibe man über der Halbirungslinie bd einen Kreisbogen dPb, der einen Winkel faßt, der um so viel kleiner ist als 2 R, als der Winkel P größer ist als zwei Rechte, beschreibe ferner von der Spitze b, welche der Seite CD nicht anliegt, mit bP = $\frac{1}{2}$ C′D′ einen Bogen, welcher den gegebenen durchschneidet und von diesem Punkte ziehe man auf die Spitzen a, b, c, d die Linien Pa, Pb, Pc, Pd, und durch c mit Pb die Linie CD parallel und zwar so, daß ihr Mittelpunkt in den Punkt c fällt, und durch den Punkt b die Linie BC mit Pc so, daß Cb = bB, und durch a die Linie BA mit Pd parallel, daß Ba = aA wird, ziehe AD, so ist ABCD das gesuchte Viereck.

Beweis. Es zeigt sich leicht, daß BD = 2 bc = B′D′, eben so daß AC = 2 dc = A′C′, daß bd = b′d′ ist, und die Mittelpunkte b und d der Seiten BC und AD verbindet, daß DC = D′C′ und daß P der Mittelpunkt der Diagonale BD ist.

Nun verbinde man die Punkte b und d mit dem Mittelpunkte q der Diagonale AC, so ist dPbq ein Parallelogramm, worin die Winkel bei P und q gleich sind und die Linie Pd mit AB und dq mit DC parallel geht. Zwischen den Winkeln, welche durch diese Parallel-Linien entstanden sind, gelten folgende Gleichungen

$$\begin{aligned} BAD + CDA &= PdD + qdA \\ &= qdD + PdA + 2\,Pdq \end{aligned}$$

Nun ist bPD + Pdq = 2R und qdD + PdA + Pdq = 2R, also ist BAD + CDA = bPd + 2 Pdq,
also betragen die beiden Winkel bei A und D die gegebene Summe und folglich erfüllt das Viereck ABCD die aufgestellten Bedingungen der Aufgabe.

Anmerkung. Ist die Summe der beiden Winkel kleiner als zwei Rechte, so muß über der Halbirungslinie bd ein Bogen gezogen

werden, der die gegebene Winkelsumme faßt, im Uebrigen aber wie oben verfahren werden.

§. 400.

Aufgabe. Es sind zwei Nachbarseiten, die ihnen zugehörige Diagonale, der ihnen gegenüberstehende Winkel und eine Halbirungslinie gegeben. Man soll daraus ein Viereck bilden. Fig. 451.

Auflösung. Die beiden Seiten seyen AD und AB, die ihnen zugehörige Diagonale BD, der ihr gegenüberstehende Winkel x, die der Seite AD zugehörige Halbirungslinie db. Man bilde aus den beiden Seiten und der ihnen zugehörigen Diagonale das Dreieck ABD, halbire die Diagonale BD und beschreibe über ihrer Hälfte Be einen Bogen Bbe, der den gegebenen Winkel x faßt. Nun beschreibe man von dem Mittelpunkte d der Seite AD mit der Halbirungslinie db einen Bogen, welcher den beschriebenen Winkelbogen Bbe in einem Punkte b durchschneidet, ziehe von B durch den Durchschnittspunkt b die Linie Bb und mache bC = Bb und ziehe CD, so ist ABCD das gesuchte Viereck.

Beweis. Nach der Construction hat das Viereck ABCD die zwei Seiten AB und AD und die Diagonale BD, ferner ist der Winkel Bbe = x, die Linie Bb = bC und Be = eD. Zieht man nun die Linie be, so verbindet diese Linie die Mittelpunkte der beiden Seiten BC und BD, und es stehen die Seiten der Dreiecke Bbe und BCD in einer geometrischen Proportion und folglich sind die Dreiecke Bbe und BCD einander ähnlich und der Winkel BCD = Bbe = x. Die gegebene Halbirungslinie bd verbindet die Mittelpunkte d und b der Seiten AD und BC mit einander. Also erfüllt das Viereck ABCD die Bedingungen der Aufgabe.

Anmerkung. Die Aufgabe ist so lange möglich, als der mit bd gezogene Bogen den beschriebenen Winkelbogen durchschneidet oder berührt. Sie wird unmöglich, wenn sie ihn weder durchschneidet noch berührt.

Die Aufgabe läßt zwei Auflösungen zu, die beide den Bedingungen genügen, wenn der beschriebene Winkelbogen an zwei Punkten durchschnitten wird.

§. 401.

Aufgabe. Es sind zwei anliegende Seiten, die ihnen zugehörige Diagonale, eine Halbirungslinie und der Winkel, welchen die zweite Diagonale mit einer der nicht gegebenen Seiten bildet, gegeben. Man soll daraus ein Viereck bilden. Fig. 452.

Auflösung. Die Seiten seyen AB und AD, die ihnen zugehörige Diagonale BD, die der Seite AD zugehörige Halbirungslinie bd, der zwischen der zweiten Diagonale und CD liegende Winkel sey x.

Man bilde aus den beiden Seiten und der Diagonale das Dreieck ABD, halbire die Diagonale BD und die Seite AB, verbinde ihre Mittelpunkte a und e durch die Linie ae, beschreibe über ae einen Kreisbogen abe, welcher den gegebenen Winkel x faßt, halbire die Seite AD und beschreibe von ihrem Mittelpunkte d aus mit der Halbirungslinie bd, als Radius, einen Bogen, welcher den Winkelbogen in dem Punkte b durchschneidet, ziehe von B durch den Punkt b eine unbestimmte Linie und mache Bb = bC, ziehe CD, so ist ABCD das gesuchte Viereck.

Beweis. Nach der Construction enthält das Viereck ABCD die beiden Seiten und die Diagonale; eben so die Linie bd, welche die beiden Seiten BC und AD halbirt. Der Winkel abe ist dem gegebenen Winkel gleich, die Linie BC, BD und BA sind in den Punkten a, e und b halbirt, hieraus folgt, daß die Dreiecke aBb und ABC; Bbe und BCD ähnlich und folglich die Linien ab und AC, eb und DC parallel sind und daß also die von ihnen eingeschlossenen Winkel einander gleich sind und der Winkel ACD = abe = x ist. Das Viereck ABCD erfüllt also die Bedingungen der Aufgabe.

Anmerkung. Die Aufgabe ist so lange möglich, als der mit db beschriebene Bogen, den Winkelbogen abe durchschneidet oder berührt; sie ist unmöglich, wenn er ihn weder durchschneidet, noch berührt.

Wird der Bogen abe an zwei Punkten durchschnitten, so sind zwei auflösende Dreiecke möglich und die Aufgabe wird unbestimmt.

§. 402.

Aufgabe. Es sind die beiden Halbirungslinien, eine Seite und eine Diagonale, und der dieser gegenüberstehende, aber der gegebenen Seite nicht anliegende Winkel gegeben. Man soll daraus ein Viereck bilden. Fig. 453.

Auflösung. Die Halbirungslinien seyen db und ac, die Diagonale AC, die der Halbirungslinie bd zugehörige Seite sey AD, der Winkel, welcher der Diagonale gegenübersteht x.

Man bilde nach §. 353. aus der halben Diagonale dc $= \frac{1}{2}$AC, als Seite, und den beiden Halbirungslinien db und ac, als Diagonalen, das Rhomboid abcd; beschreibe über der Seite dc den Kreisbogen dec, welcher den gegebenen Winkel x faßt, und mit der halben Seite ae $= \frac{1}{2}$AD, als Radius, von dem Endpunkte a der nicht zugehörigen Halbirungs-Linie, einen Bogen, welcher den gegebenen in dem Punkte e berührt oder durchschneidet, verbinde diesen Punkt e mit den Punkten a, b, d und c, lege durch den Punkt d die Linie AD mit ae parallel, mache Ad $=$ dD $= \frac{1}{2}$AD, ziehe von A durch a die Linie AB, mache aB $=$ aA, ziehe von D durch c die Linie DC, mache cC $=$ cD und ziehe BC, so ist ABCD das gesuchte Viereck.

Beweis. Man ziehe die Diagonale AC. Nach der Construction ist dD $=$ Ad, Dc $=$ cC, also sind die beiden Dreiecke Ddc und DAC ähnlich, und folglich dc : AC $=$ Dd : AD $=$ 1 : 2. Da nun dc $= \frac{1}{2}$AC ist, so ist AC $= 2 \cdot \frac{1}{2}$AC $=$ AC, also hat das Viereck die gegebene Diagonale.

Nach der Construction gehet die Linie ab mit dc und demnach auch mit AC parallel, also sind die beiden Dreiecke aBb und ABC einander ähnlich und die Linie aA $=$ aB, also ist auch Bb $=$ bC. Hieraus folgt, daß die gegebenen Linien db und ac die Seiten des Vierecks halbiren.

Zieht man nun durch die Punkte B und e die Linie Be

bis zum Durchschnitte D, so ist diese Linie eine Diagonale, denn es ist wegen der Parallelen ae und AD

$$aB : ae = BA : BD$$

also muß die Linie Be durch den Punkt D gehen. Hieraus folgt, daß BD in e halbirt wird und daß die Dreiecke Dde und DAB, Dec und DBC ähnlich sind, und daß folglich ed mit AB und ec mit BC parallel geht. Dieß führt zu dem Schlusse, daß der Winkel ABC = dec = x ist. Das Viereck genügt also den Bedingungen der Aufgabe.

§. 403.

Aufgabe. Es sind die beiden Halbirungslinien, eine Seite, eine Diagonale und der Winkel, durch dessen Spitze die Diagonale geht, aber der gegebenen Seite nicht anliegt, gegeben. Man soll daraus ein Viereck bilden. Fig. 453.

Auflösung. Die Halbirungslinien seyen db und ac, die der Halbirungslinie db zugehörige Seite sey AD, die Diagonale BD, der Winkel, durch dessen Spitze sie geht, sey x.

Man bilde nach §. 353. aus der halben Diagonale ad = $\frac{1}{2}$BD, als Seite, und den beiden Halbirungslinien, als Diagonalen, das Parallelogramm abcd, beschreibe über der Seite dc des construirten Parallelogrammes einen Kreisbogen dec, welcher den gegebenen Winkel x faßt, beschreibe mit der halben Seite ae = $\frac{1}{2}$AD, als Radius, einen zweiten Kreisbogen, welcher den ersten berührt oder durchschneidet, ziehe von a nach e die Linie ae, und durch d mit ae die Linie AD parallel, mache Ad = dD, ziehe durch A und a die Linie AB, mache Aa = aB und durch D und c die Linie DcC, mache Dc = cC und ziehe BC, so ist ABCD das gesuchte Viereck.

Der Beweis führt sich auf die nämliche Art, wie bei der vorigen Aufgabe.

Anmerkung zu den Aufgaben in diesem und dem vorhergehenden §. Die Aufgabe ist so lange möglich, als der mit der halben Seite gezogene Kreisbogen den ersten berührt oder durchschneidet. Sie ist unmöglich, wenn er ihn weder durchschneidet

noch berührt. Sie ist ferner unmöglich, wenn der Durchschnittspunkt der beiden Kreisbogen ausserhalb des gebildeten Parallelogrammes fallen sollte. In dem Falle, wenn zwei Durchschnittspunkte möglich sind, sind auch zwei auflösende Vierecke möglich, und die Aufgabe ist dann unbestimmt.

§. 404.

Aufgabe. Es sind ein Winkel, die anliegenden Seiten und die zwei Halbirungslinien gegeben. Man soll daraus ein Viereck bilden. Fig. 454.

Auflösung. Der Winkel sey x, die umliegenden Seiten A'B' und A'D', die ihnen zugehörigen Halbirungslinien ac und db. Man trage auf die Schenkel des Winkels y die beiden Seiten AB = A'B' und AD = A'D', halbire sie und beschreibe von dem Mittelpunkte a der Seite AB mit der Hälfte der ihr zugehörigen Linie ac einen Kreisbogen, und von dem Mittelpunkte d der Seite AD mit der Hälfte der ihr zugehörigen Linie db einen, den gezogenen durchschneidenden Kreisbogen, lege von den Mittelpunkten a und d durch den genannten Durchschnittspunkt e die Halbirungslinien aec und deb, ziehe von dem Endpunkte B eine gerade Linie durch b und von D durch c, so daß sich beide in einem Punkte C durchschneiden, so ist ABCD das gesuchte Viereck.

Beweis. Vermöge der Construction ist der Winkel DAB dem Winkel y und die beiden anliegenden Seiten sind den gegebenen gleich. Die Halbirungslinien ac und db des Vierecks ABCD durchschneiden sich gegenseitig in ihren Mittelpunkten e. Wird der Punkt e bestimmt und werden durch ihn die Halbirungslinien gelegt, so fallen sie mit den beiden andern Endpunkten in den Mittelpunkten der gegenüberstehenden Linien auf. Werden daher durch die Endpunkte B und D, b und c zwei Linien bis zum Durchschnitte in C gelegt, so sind die beiden Linien BC und CD die beiden übrigen Seiten des Vierecks.

§. 405.

Aufgabe. Es sind ein Winkel, die anliegende Seite,

die ihr gegenüberstehende Seite und die beiden Halbirungslinien gegeben. Man soll daraus ein Viereck bilden. Fig. 455.

Auflösung. Der Winkel sey y, die anliegende Seite A'D', die ihr gegenüberstehende B'C', die diesen beiden zugehörige Halbirungslinie d'b', die zweite den unbekannten Seiten zugehörige a'c'. Man bilde aus der, den unbekannten Seiten zugehörigen, Halbirungslinie ac = a'c', als Diagonale, und den beiden Hälften der gegebenen Linien $\frac{1}{2}$ A'D' = ec und $\frac{1}{2}$ B'C' = c das Parallelogramm aecf, trage an den Endpunkt e, der Hälfte von AD, den ihr anliegenden Winkel y = ceb mit unbestimmtem Schenkel, halbire die Halbirungslinie ac und trage von ihrem Mittelpunkte m die Hälfte von db so an, daß sie mit ihrem Endpunkte in b falle; nun lege man durch den Punkt b eine unbestimmte Linie mit ea parallel und schneide von b aus, auf beiden Seiten von b, die Stücke bB = bC = $\frac{1}{2}$ B'C' ab, ziehe von B durch den Endpunkt a eine Linie und mache aA = aB, eben so von C durch c und mache cD = cC, ziehe AD, so ist ABCD das gesuchte Viereck.

Beweis. Man verlängere die Linie bm bis zum Durchschnitte d mit AD und verbinde e mit d und f mit d, so trifft die Linie bd in d die Mitte von AD, da sie durch die Mitte von BC und ac geht. Ferner ist debf ein Parallelogramm, worin die Seite eb mit df und mit AB parallel geht; eben so de mit fb und diese mit DC. Demnach ist debf ein Parallelogramm, welches durch die Diagonale ef in zwei congruente Theile def und ebf getheilt wird. Hieraus folgert sich nun leicht, daß dm = mb und daß also db = 2 . $\frac{1}{2}$d'b' = d'b' und der gegebenen Halbirungslinie gleich ist. Vermöge der Construction ist BC der gegebenen Linie B'C' gleich und ac = a'c'.

Es ist nun noch zu beweisen, daß AD = A'D' und der Winkel DAB = y ist. Nach der Construction ist Dd = ec = $\frac{1}{2}$ A'D'. Da nun db die Halbirungslinie ist, so ist auch dA = dD, also AD = 2 . $\frac{1}{2}$ A'D' = A'D'.

Der Winkel DAB = ceb = y, denn es ist eb parallel zu Ab und ec parallel zu AD. Da nun ceb = y, so ist auch DAB dem gegebenen Winkel y gleich. Hieraus folgt, daß das Viereck ABCD die aufgestellten Brdingungen erfüllt.

§. 406.

Aufgabe. Es sind die vier Seiten, und die Summe der zwei an einer Seite anliegenden Winkel gegeben. Man soll daraus ein Viereck bilden. Fig. 456.

1) Die Summe s der beiden Winkel sey kleiner als zwei Rechte, die Seiten seyen A′B′, B′C′, C′D′, D′A′, die Linie D′C′ sey die Seite an der die Winkel liegen sollen.

Auflösung. Man bilde aus der Ergänzung der gegebenen Winkelsumme 2 R — s und den Hälften der an D′C′ anliegenden Seiten ec = $\frac{1}{2}$ B′C′ und cf = $\frac{1}{2}$ D′A′ das Parallelogramm ceaf, verbinde die Punkte e und f durch die Diagonale ef und beschreibe über ihr mit den Hälften der beiden übrigen Seiten eb = $\frac{1}{2}$ C′D′ und fb = $\frac{1}{2}$ A′B′ das Parallelogramm debf. Nun lege man durch den Punkt a eine unbestimmte Linie parallel mit de, schneide von a aus auf beiden Seiten aA = aB = $\frac{1}{2}$ A′B′ ab, ziehe von B durch b eine Linie und mache bC = Bb, eben so von C durch c und mache cD = cC, und endlich ziehe man AD, so ist ABCD das gesuchte Viereck.

2) Ist die Summe der beiden anliegenden Winkel größer als zwei Rechte, so bilde man aus ihrem Ueberschuß über 2 R, wie vorhin aus der Ergänzung, das Parallelogramm aefc und verfahre wie oben.

Beweis. Die Linie de ist der aA parallel und gleich, also ist AB = 2 Aa = 2 . $\frac{1}{2}$A′B′. Eben so ist BC = 2 Bb = 2 af = 2 . $\frac{1}{2}$B′C′ u. s. w.; also sind die vier Seiten AB, BC, CD, DA des Vierecks ABCD den gegebenen Linien A′B′, B′C′, C′D′, D′A′ gleich.

Nun ist noch zu beweisen, daß die gegebene Winkelsumme

der Summe der an DC liegende Winkel ADC und DCB gleich ist. Dieß erhellt aus Folgendem: da die Linie ec mit BC parallel lauft, so ist der Winkel $x = x'$, und da fc mit AD parallel lauft, so ist der Winkel $y = y'$, da aber die Winkel über einer geraden Linie zwei Rechten gleich sind, so ist

$$x' + z' + y' = 2R$$

also

$$z' = 2R - x' - y'$$

oder, wenn obige Werthe gesetzt werden,

$$z' = 2R - x - y$$

also auch

$$x + y = 2R - z'$$

Da nun $s = x + y$ ist, so sind die beiden an DC liegenden Winkel der gegebenen Summe gleich.

§. 407.

Aufgabe. Es sind die vier Seiten und eine Halbirungs-Linie gegeben. Man soll daraus ein Viereck bilden. Fig. 455.

Auflösung. Die Seiten seyen A'B', B'C', C'D', D'A', die den Seiten AB und CD zugehörige Halbirungslinie ac. Man bilde aus der Halbirungslinie ac, als Diagonale, und den Hälften der beiden nicht zugehörigen Seiten $cf = \frac{1}{2} B'C'$, $af = \frac{1}{2} A'D'$ das Parallelogramm aecf, ziehe die Diagonale ef und bilde aus dieser und den Hälften der beiden andern Seiten das Parallelogramm debf. Nun lege man durch den Punkt b mit cf oder ea die Linie CB, durch c mit fb oder de die Linie DC, durch d mit ec oder fa die Linie DA, mit eb oder df, durch den Punkt a die Linie AB parallel, so ist ABCD das gesuchte Viereck.

Beweis. Nach der Construction ist CB, cf und ea parallel und ea = cf; eben so fb, de und DC parallel und de = fb. Hieraus folgt, daß das Viereck fbCc ein Parallelogramm ist, also daß $bC = fc = \frac{1}{2} B'C'$ und eben so $fb = cC = \frac{1}{2} D'C'$ ist. Auf gleiche Art beweist man, daß eaBb ein Parallelogramm ist und daß also $Bb = ea = fc = \frac{1}{2} B'C'$ ist. Es ist also

$$BC = Bb + bC = 2 . fc = \tfrac{1}{2} B'C' + \tfrac{1}{2} B'C' = B'C'$$

Auf gleiche Art zeigt man, daß

$$DC = Dc + cC = de + fb = 2fb =$$
$$= \frac{1}{2}D'C' + \frac{1}{2}D'C' = D'C'$$
$$AD = Ad + dD = af + ec = 2ec =$$
$$= \frac{1}{2}A'D' + \frac{1}{2}A'D' = A'D'$$
$$AB = Aa + aB = df + eb = 2eb =$$
$$= \frac{1}{2}A'B' + \frac{1}{2}A'B' = A'B'$$

ist. Hieraus geht hervor, daß die Linie ac die Seiten AB und DC halbirt und das Viereck ABCD die vier gegebenen Seiten enthält.

§. 408.

Aufgabe. Es sind drei Winkel, eine Seite und die den beiden andern Seiten zugehörende Halbirungs-Linie gegeben. Man soll daraus ein Viereck bilden. Fig. 457.

Erste Auflösung. Es sey gegeben die Linie B'C', die ihr gegenüberstehende Halbirungslinie a'c' und die Winkel x, y, z, von denen x an dem Punkte B, y an C und z an A liegen soll. Man bilde aus ac = a'c', als Diagonale, und dem Ergänzungs- oder Ueberschuß-Winkel zu zwei Rechten für die Winkel x und z, welche an der Seite liegen, zu der die Halbirungslinie gehört, und der Hälfte der gegebenen Seite ae = $\frac{1}{2}$B'C' das Parallelogramm eafc, trage an den Punkt e der Seite ec den Winkel z, der an dem Endpunkte A liegen soll, so daß der Schenkel eb die eine Seite af des Parallelogramms af durchschneidet, und an den Punkt f der Linie cf den Winkel cfb = y, so daß der Schenkel fb genugsam verlängert, den Schenkel des Winkels ceb in einem Punkte b durchschneidet. Nun ziehe man durch den Punkt b eine Linie mit cf oder ea parallel, schneide von b aus auf beiden Seiten gleiche Stücke bB und bC, welche die Hälfte der gegebenen Seite B'C' betragen, ab, ziehe von B und C aus durch die Punkte a und c gerade Linien, mache ihre Verlängerungen den

Zwischenstücken gleich, also $aA = aB$ und $cD = cC$, ziehe die Linie AD, so ist ABCD das gesuchte Viereck.

Beweis. Nach der Construction ist die Linie $BC = bB + bC = \frac{1}{2}B'C' + \frac{1}{2}B'C'$ und $ac = a'c'$, also sind in dem Viereck ABCD die gegebenen Linien enthalten.

Die Winkel über einer geraden Linie sind zwei Rechte, also ist
$$n + o + m = 2R$$
Der Winkel a ist der Ergänzungswinkel zu zwei Rechten, für die Winkel x und z, also ist $x + z + o = 2R$ und hieraus
$$n + o + m = x + z + o$$
oder
$$n + m = x + z$$

Nach der Construction ist BC parallel mit ea, also der Winkel $n = x$ und zugleich $z = m$. Das Viereck cfbC ist ein Parallelogramm, also der Winkel
$$cCb = cfb = y$$
Die Linie ac verbindet die Mittelpunkte a und c der Seiten AB und DC, also ist ABCD das gesuchte Viereck.

Zweite Auflösung. Fig. 458. Man trage an den Punkt B den Winkel x, an C den Winkel y, verlängere ihre Schenkel unbestimmt, trage an irgend einem Punkte f den Winkel $Bfg = z$ an und verlängere fg bis zum Durchschnitte g mit DC. Nun halbire fB und gC, verbinde die Mittelpunkte e und c' durch die Linie ec', trage von c' aus die Halbirungslinie c'a' auf c'e, ziehe durch den Punkt a eine Linie a'a parallel mit DC bis zum Durchschnitte a der Linie AB und ziehe dann ac parallel mit c'e und mache $aA = aB$, $cD = cC$, so ist ABCD das gesuchte Viereck.

Der Beweis führt sich durch die parallele Lage der gezogenen Linien und durch die Aehnlichkeit der Vierecke BfgC und BADC leicht.

§. 409.

Aufgabe. Es sind drei Winkel, eine Seite und die ihr zugehörige Halbirungslinie gegeben. Man soll daraus ein Viereck bilden. Fig. 459.

Auflösung. Die gegebene Seite sey DC, die ihr zugehörige Halbirungslinie ac, die an DC liegenden Winkel seyen x und y, der an B liegende sey z. Man trage an den Endpunkt D der Linie DC den Winkel x und an C den Winkel y mit unbestimmtem Schenkel, trage an irgend einem Punkte d dieses Schenkels den dritten Winkel z = cde bis zum Durchschnitte e mit dem gegenüberstehenden Schenkel, halbire diese Linie ed und die Seite DC, lege durch ihren Mittelpunkt c und h die Halbirungslinie ca, ziehe durch a die Linie AB parallel mit ed bis zu den Durchschnitten A und B der Schenkel DA und CB, so ist ABCD das gesuchte Viereck.

Beweis. Da AB mit ed parallel geht, so ist der Winkel ABC = edc = z, also hat das Viereck ABCD die drei gegebenen Winkel. Da die Linien AB und ed, welche unter sich parallel sind, von einer dritten geschnitten werden, so werden beide nach gleichem Verhältnisse geschnitten, also ist

$$Aa : aB = eh : hd$$

und demnach die beiden Linien Aa und aB einander gleich. Die Linie ca halbirt die Seiten DC und AB. Das Viereck ABCD erfüllt also die Bedingungen der Aufgabe.

§. 410.

Aufgabe. Es sind zwei gegenüberstehende Seiten, die zwei einer von ihnen anliegenden Winkel und die den beiden andern zugehörige Halbirungslinie gegeben. Man soll daraus ein Viereck bilden. Fig. 455.

Auflösung. Die Seiten seyen A'D' und B'C', die der Linie BC anliegenden Winkel seyen x und y, die Halbirungs-Linie sey ca. Man bilde aus ihr, als Diagonale, und der Hälfte der beiden Seiten cf = $\frac{1}{2}$B'C' und af = $\frac{1}{2}$A'D' das Parallelogramm cfae, trage an dem Punkte f auf cf den Winkel y = cfb und an dem Punkte e auf ae den Winkel x = aeb, verlängere die Schenkel fb und eb bis zu ihrem Durchschnitte in b, vollende das Parallelogramm bfde.

Nun lege man durch den Punkt b die Linie CB parallel mit fc oder ea, so daß bB = bC = $\frac{1}{2}$ B'C', und durch den Punkt d, mit ec oder af parallel, die Linie AD, so daß dD = dA = $\frac{1}{2}$ A'D', ziehe AB und DC, so ist ABCD das gesuchte Viereck.

Beweis. Da nach der Construction ea der Linie Bb parallel und gleich ist, so ist eabB ein Parallelogramm, welches den Winkel aeb = x enthält und worin also die Seite eb = aB und der Winkel aBb = aeb = x ist. Auf gleiche Weise zeigt man, daß cfbC ein Parallelogramm ist, worin fc = bC, fb = cC und der Winkel bCc = bfc = y ist, das Viereck hat also die gegebenen Winkel und die Seite B'C', denn es ist bB = bC = fc = $\frac{1}{2}$ B'C'. Aus dem nämlichen Grunde ist AD = A'D'. Endlich ist aB = eb und df = Aa, ferner df = eb, also auch Aa = AB. Eben so ist DC = cC; also halbirt die Linie ac die nicht gegebenen Seiten.

§. 411.

Aufgabe. Es ist der Umfang, eine Diagonale, der Winkel, den sie mit einer Seite bildet, und die zwei dieser Seite anliegenden Winkel gegeben. Man soll daraus ein Viereck bilden. Fig. 460.

Auflösung. Die Umfangslinie sey FE, die Diagonale A'C', der Winkel, welchen sie mit einer Seite bildet, y, die ihr anliegenden z und u. Man trage an den einen Endpunkt E und zwar auf der Verlängerung der Umfangslinie den Diagonalwinkel y = REM, trage die Diagonale A'C' = EM auf diesen Schenkel, ziehe durch M eine unbestimmte Linie MC parallel mit FE; nun lege man an den nämlichen Punkt E den Winkel FEC = $\frac{1}{2}$z bis zu dem Durchschnitte C mit der Parallele MC, durch C ziehe man CA parallel mit ME bis zum Durchschnitte A mit der Umfangslinie. An A trage man den zweiten Winkel u = EAK und mache AK = AF, verbinde K mit C durch die Linie KC, halbire KC und CE durch

die

die Senkrechten HB und GD bis zu den Durchschnitten B und D mit AK und FE, ziehe BC und CD, so ist ABCD das gesuchte Viereck.

Beweis. Nach der Construction ist ACME ein Parallelogramm, also ist AC = EM = A'C'; ferner ist wegen der Parallelen der Winkel MER = CAR = y, also hat das Viereck die Diagonale und den von ihr und einer Seite eingeschlossenen Winkel.

Nach der Construction ist ferner der Winkel CED = $\frac{1}{2}$z, die Dreiecke CDG und DGE sind congruent, also ist der Winkel bei C dem Winkel bei E gleich, und es ist der Winkel

$$ADC = DEC + DCE = \tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{2}z = z$$

also hat das Viereck den einen Winkel bei D = z und auch den Winkel BAD = n, folglich auch die beiden Winkel nach den Bedingungen der Aufgabe.

Aus der Congruenz der Dreiecke CDG und DGE, KBH und BHC folgt, daß DC = DE und KB = BC, also auch daß

$$AD + DC + BC + BA = AD + DE + KB + BA$$
$$= AE + AK$$

ist. Da aber auch AK = AF ist, so ist

$$AB + BC + CD + DA = FA + AE = FE$$

Das Viereck hat also auch den gegebenen Umfang.

§. 412.

Aufgabe. Es ist der Umfang, eine Diagonale, der Winkel, den sie mit der anliegenden Seite macht, die beiden Winkel, welche der Diagonale gegenüberstehen, gegeben. Man soll daraus ein Viereck bilden. Fig. 461.

Auflösung. Der Umfang sey FE, die Diagonale A'C', der von ihr und der anliegenden Seite AD eingeschlossene Winkel x, die beiden ihr gegenüberstehenden Winkel z und u.

Man trage an irgend einem Punkte E der Umfangslinie die Diagonale A'C' = EM unter dem Winkel REM = x,

ziehe durch M eine unbestimmte Linie MC parallel mit FE. An den Endpunkt E lege man unter dem Winkel FEC = $\frac{1}{2}$z eine Linie EC bis zum Durchschnitte C mit der Parallele MC durch C ziehe man die Linie CA parallel mit ME bis zum Durchschnitte A mit FE, ziehe CE und halbire die Linie CE durch eine Senkrechte GD bis zum Durchschnitte D. Nun beschreibe man über der Diagonale AC, nach §. 237., ein Dreieck ABC, dessen Scheitelwinkel ABC dem gegebenen Winkel u und dessen Seitensumme AB + BC = AF ist, so ist ABCD das gesuchte Viereck.

Der Beweis führt sich mit dem zur vorigen Aufgabe und mit dem zu §. 237. Gesagten leicht.

Anmerkung. Da die Linie AF auch von dem Endpunkte C aus in den Kreisbogen AK'C getragen werden kann, so entstehen zwei Dreiecke ABC und AB'C über der Linie AC, die obwohl unter sich congruent, dennoch in Verbindung mit dem Dreiecke ACD zwei verschiedene Vierecke AB'CD und ABCD erzeugen. Die Aufgabe ist also unbestimmt, wenn nicht die nähere Beschaffenheit der Winkel bei A und C angegeben ist. Dem Inhalte nach sind beide Vierecke ABCD und AB'CD einander gleich.

Siebentes Kapitel.

Aufgaben über den Kreis.

A

Aufgaben über Linien und Winkel in und am Kreise.

§. 413.

Aufgabe. Es ist ein Kreisbogen, oder die Peripherie eines Kreises gegeben. Man soll den zugehörigen Mittelpunkt bestimmen. Fig. 462.

Erste Auflösung. Der Kreisbogen ABDE sey gegeben. Man ziehe zwei beliebige Sehnen in den Kreisbogen, errichte in ihren Mittelpunkten die senkrechten Linien GC und G'C bis zu ihrem Durchschnitte in C, so ist der Punkt C der dem Kreisbogen zugehörige Mittelpunkt.

Beweis. Da jede Linie, welche die Sehne eines Kreises halbirt, hinlänglich verlängert, durch den Mittelpunkt des Kreises geht, so muß der Durchschnittspunkt C der beiden Sehnen der dem Kreisbogen zugehörige Mittelpunkt seyn.

Zweite Auflösung. Fig. 463. Man ziehe in dem Kreisbogen die beliebige Sehne AD, errichte eine senkrechte Linie in ihrem Mittelpunkte und verlängere sie auf der einen Seite so, daß sie den Kreisbogen in B treffe und auf der andern Seite unbestimmt sey; verbinde den Punkt B mit dem einen Endpunkte D des Kreisbogens und errichte in D die Linie DE senkrecht bis zum Durchschnitte mit der Linie BE in E, halbire die Linie BE, so ist der Halbirungspunkt C das gesuchte Centrum.

Der Beweis gründet sich auf den Satz, daß die Hypotenuse eines in den Kreis beschriebenen rechtwinkligen Dreiecks durch den Mittelpunkt des Kreises geht und ihre beiden Endpunkt, so wie die Spitze des rechten Winkels in des Kreises Peripherie Winkel liegen, die zur Sehne AD senkrechte Linie BE gibt die Richtung der Hypotenuse an.

Anmerkung. Die Bestimmung des Mittelpunkts wird desto genauer, je mehr sich der Winkel GCG′ Fig. 462. nach der ersten Auflösung, den die beiden Linien GC und GC′ machen, einem rechten Wiukel nähert. Die Sehnen AD und BE sind daher immer in größt möglicher Entfernung von einander zu ziehen.

Kleine Kreisbogen werden in beiden Fällen keine so genaue Bestimmung als größere oder ganze Kreise zulassen. Bei der zweiten Auflösung hängt die Genauigkeit der Auflösung von dem Durchschnitte der Linie BE und DE ab.

Soll eine algebraische Bestimmung der Größe des Radius und dadurch des Centrums gegeben werden, so findet man dieß leicht, wenn man die Hälfte der Sehne AD = a, die Entfernung ihres Mittelpunkts von der Peripherie BG = b und GE = x setzt, durch folgende Proportion

$$b : a = a : x$$

und hieraus $x = \frac{a^2}{b}$

Zählt man zu x = GE die Linie BG, so hat man den Diameter

$$BE = \frac{a^2}{b} + b$$

halbirt man diesen, so erhält man für den Radius BC folgende

Gleichung $BC = \frac{a^2 + b^2}{2b}$

wornach sich der Kreis beschreiben läßt.

§. 414.

Aufgabe. Es ist ein Punkt in der Peripherie eines Kreises gegeben. Man soll an diesen Punkt eine Tangente ziehen. Fig. 464.

Auflösung. Der gegebene Punkt in der Peripherie des Kreises ADB sey B. Man verbinde diesen mit dem Centrum

C durch die gerade Linie CB und errichte in dem Punkte B eine Linie TG senkrecht, so ist diese Linie die gesuchte Tangente.

§. 415.

Aufgabe. Es ist ein Kreis und ausserhalb desselben ein Punkt gegeben. Man soll von diesem Punkte aus eine Tangente an die Peripherie des Kreises ziehen.

Erste Auflösung. Fig. 465. Man verbinde den gegebenen Punkt B mit dem Mittelpunkte C des Kreises ADD'; halbire die Linie BC und beschreibe von ihrem Mittelpunkte E mit ihrer Hälfte EB einen Kreisbogen, der die Peripherie des Kreises in zwei Punkten D oder D' durchschneidet, ziehe von dem Punkte B eine Linie durch einen dieser Punkte D, so ist BDT die gesuchte Tangente.

Beweis. Nach der Construction ist BC der Diameter des Kreises BDC; der Winkel BDC steht mit seinen Schenkeln auf den Endpunkten des Diameters auf und liegt mit seiner Spitze in dem Punkte D der Peripherie des Kreises DBD, ist also ein rechter Winkel. Die Linie BDT steht also auf dem Endpunkte D der Linie CD senkrecht auf. Nun ist aber die Linie CD ein Radius des Kreises ADD' und sein Endpunkt D zugleich ein Punkt in der Peripherie dieses Kreises. Hieraus folgt, daß die Linie BDT eine Tangente des Kreises ADD' ist.

Anmerkung. Da es für die zwei Kreise D'BD und ADD' zwei Durchschnittspunkte D und D' gibt, so sind auch zwei Tangenten BDT und BD'T' möglich, die beide der Aufgabe genügen.

Zweite Auflösung. Fig. 466. Von dem Punkte B ziehe man zum Mittelpunkt C des Kreises die Linie BC und errichte an dem Punkte E, wo diese Linie die Peripherie des Kreises durchschneidet, eine senkrechte unbestimmte Linie EH, beschreibe mit dem Radius CB den Kreisbogen H'BH, daß er die senkrechte Linie in H durchschneide und ziehe von diesem Durchschnittspunkte H nach C die Linie HC, so daß die Peripherie des gegebenen Kreises in D durchschnitten wird, endlich ziehe

man durch diesen Durchschnittspunkt von B die Linie BDT, so ist diese die gesuchte Tangente.

Beweis. Die Linie BC und CH in den Dreiecken BCD und ECH sind als Radien des Kreises H'BH einander gleich, eben so die Linien CE und CD als Radien des Kreises D'ED. Der Winkel x gehört zu beiden Dreiecken. Hieraus folgt die Congruenz der Dreiecke BCD und CEH und die Gleichheit der Winkel r und r'. Da nun der Winkel r' ein Rechter ist, so ist es auch r und folglich steht die Linie BT auf dem Endpunkte D des Radius CD senkrecht auf, ist also eine Tangente des Kreises D'ED.

Anmerkung. Auch hier sind zwei Auflösungen möglich, die Linie BT und BD'T'. Beide genügen der Aufgabe.

Dritte Auflösung. Fig. 467. Man ziehe von dem Punkte B durch den Mittelpunkt C bis zum Durchschnittspunkt der Peripherie in A die Linie BA, errichte in dem Punkte B der Linie AB eine unbestimmte senkrechte Linie BK, trage den Abstand BG des Punkts B von der Peripherie vom Mittelpunkte C aus auf CB, daß CE = BG ist, beschreibe von E aus mit der Linie EA einen Kreisbogen FKA, welcher die senkrechte BK in K durchschneidet, trage diese Linie so an die Peripherie des gegebenen Kreises an, daß ihr Endpunkt in D in dieselbe fällt, ziehe die Linie BDT, so ist diese die Tangente.

Beweis. Man verlängere die Linie AB um BF = BG. Da die Linie $CA = CG = \frac{1}{2}AG$ und $CE = GB = \frac{1}{2}GF$ ist, so ist $AC + CE = AE = \frac{1}{2}GA + \frac{1}{2}GF = \frac{1}{2}AF$ Da mit der Linie $EA = \frac{1}{2}AF$ ein Halbkreis über der Linie AF, als Durchmesser, gezogen wurde und BK senkrecht in B aufsteht und bis zur Peripherie K reicht, so gilt folgende Proportion

$$AB : BK = BK : BF$$

und hieraus

$$BK^2 = AB \,.\, BF$$

Da aber BF = BG, so ist auch

$$BK^2 = AB \,.\, BF$$

Nun ist bekanntlich die Tangente die mittlere geometrische Proportional-Linie zwischen der Sekante und dem äussern Abschnitt. Die Linie BA ist die Sekante und BF dem äussern Abschnitte gleich und BK die mittlere Proportionale zwischen

beiden, also ist auch die Linie BD = BK, die Tangente für den Punkt B und den Kreis D'EDA.

Anmerkung. Auch hier ist eine zweite Tangente BD'T' von B aus an den gegebenen Kreise möglich.

§. 416.

Aufgabe. Es sind zwei Kreise gegeben. Man soll an beide eine gemeinschaftliche Tangente ziehen.

1) Die Tangente soll auf einer Seite der Centrale liegen. Fig. 468.

Erste Auflösung. Der größere Kreis sey TPT' und sein Radius CT = R, der kleinere Kreis sey GKG' und sein Radius sey r. Man verbinde die Mittelpunkte der beiden Kreise durch die Linie CC', beschreibe über dieser Linie, als Durchmesser, den Kreis CMC'N, trage von dem Mittelpunkt C des größern Kreises den Unterschied der beiden Radien CB = R — r, als Sehne, in den Kreis CMC'N, verlängere EB bis zum Durchschnitte der Peripherie des größeren Kreises in T, ziehe von dem Mittelpunkte C des kleinern Kreises eine Linie C'G parallel mit CT bis zum Durchschnitte G seiner Peripherie und ziehe durch beide Punkte F und G die Linie FGA, so ist diese die gesuchte gemeinschaftliche Tangente.

Beweis. Nach der Construction ist der Winkel CBC' ein rechter Winkel, also steht die Linie BC' auf CT senkrecht auf, die Linie BT = GC', denn es ist

$$BT = CT - BC = R - (R - r)$$

Nun lauft die Linie GC' mit BT parallel und ist ihr gleich, folglich sind die beiden Linien BC' und TG gleichfalls parallel, also die Winkel bei T und G Rechte, folglich steht die Linie TG auf den Endpunkten der Radien CT und C'G senkrecht auf, ist also für beide Kreise eine gemeinschaftliche Tangente.

Anmerkung. Es ist klar, daß auf der andern Seite der Centrale CC' eine zweite Tangente T'G' möglich ist.

Zweite Auflösung. Wird die gemeinschaftliche Tangente TG und die Centrale CC' bis zu ihrem Durchschnitte A verlängert, so entsteht das rechtwinklige Dreieck CTA, das

durch die mit TA parallel laufende BC′ in zwei ähnliche Dreiecke getheilt wird. Hierdurch gewinnt man folgende Proportion

$$CB : CC' = CT : CA$$

oder $$R - r : CC' = R : CA$$

und hieraus $$CA = \frac{CC' \,.\, R}{R - r}$$

Sucht man daher zu dem Unterschied der beiden Radien, der Centrale und dem Radius des größern Kreises die vierte Proportionale, so findet man die Linie CA. Aus ihr, dem Radius CT und dem rechten Winkel bei T kann leicht das rechtwinklige Dreieck CAT gebildet werden, wodurch die Tangente AT gefunden wird.

Soll endlich die Linie AT algebraisch bestimmt werden, so findet man wegen des rechtwinkligen Dreiecks CTA

$$CA^2 - CT^2 = TA^2$$

oder, wenn die obigen Werthe eingeführt werden,

$$TA = \sqrt{\left(\frac{CC'^2 \,.\, R^2}{(R - r)^2} - R^2\right)} = \frac{R}{R - r}\sqrt{CC'^2 - (R\text{-}r)^2}$$

2) Wenn die gemeinschaftliche Tangente die Centrale durchschneidet.

Erste Auflösung. Fig. 469. Der größere Kreis sey KTE, sein Radius R, der kleinere GHT′, sein Radius r. Man verbinde die Mittelpunkte der beiden Kreise durch die Linie CC′, beschreibe über dieser Linie, als Durchmesser, den Kreis CMC′N und trage von dem Centrum C des größern Kreises die Linie CM = R + r als Sehne ein. Errichte im Durchschnittspunkte T dieser Linie und der Peripherie von KTE die Linie TT′ senkrecht, so ist sie die gesuchte gemeinschaftliche Tangente.

Beweis. Man verbinde die Punkte M und C′ mit einander und errichte CT′ auf MC′ in C′ senkrecht bis zum Durchschnitte mit TT′ in T, so ist der Winkel bei T, M und C′ und auch der bei T ein Rechter und die Linie TT′ steht auf C′T′ in T′ senkrecht auf; ferner ist die Linie

$$C'T' = TM = CM - CT = R + r - R = r$$

d. h. die Linie C′T′ ist dem Radius gleich. Da nun die Linie

TT' auf dem Endpunkt T des Radius CT und dem des Radius C'T' senkrecht aufsteht, so ist sie zu beiden Kreisen eine gemeinschaftliche Tangente.

Zweite Auflösung. Da die Linie TT' mit der Linie MC' parallel lauft, so wird das Dreieck CMC' durch diese Linie in zwei ähnliche Dreiecke getheilt. Nennt man den Durchschnitt der Centrale und Tangente O, so entsteht hieraus folgende Proportion

$$CM : CC' = CT : CO$$

oder

$$R + r : CC' = R : CO$$

und es ist also $CO = \frac{CC' \cdot R}{R + r}$

Sucht man also zur Summe der beiden Radien, der Centrale und dem größern Radius die vierte Proportionale, so gibt diese Linie den Durchschnitt der Centrale und der gemeinschaftlichen Tangente. Aus ihr, als Hypotenuse, und dem größern Radius, als Kathete, läßt sich leicht die zweite Kathete, welche die Linie TO ist, finden, wodurch die Richtung der gemeinschaftlichen Tangente gegeben ist. Die Linie C'O bestimmt sich durch folgende Gleichung

$$C'O = \frac{CC' \cdot r}{R + r}$$

Soll die gemeinschaftliche Tangente TT' algebraisch bestimmt werden, so hat man wegen der rechtwinkligen Dreiecke CTO und OT'C'

$$TO = \sqrt{CO^2 - CT^2} = \sqrt{\frac{C'C^2 \cdot R^2}{(R + r)^2} - R^2}$$

und $OT' = \sqrt{C'O^2 - C'T'^2} = \sqrt{\frac{C'C^2 \cdot r^2}{(R + r)^2} - r^2}$

uund hieraus

$$TO + OT' = TT' = R\sqrt{\frac{C'C^2 - (R+r)^2}{(R+r)^2}} + r\sqrt{\frac{C'C^2 - (R+r)^2}{(R+r)^2}}$$

$$= \frac{R}{R+r}\sqrt{C'C^2 - (R+r)^2} + \frac{r}{R+r}\sqrt{C'C^2 - (R+r)^2}$$

$$= \sqrt{C'C^2 - (R + r)^2}$$

Die oben angegebene Auflösung ist die einfachste Construction dieser Formel.

§. 417.

Aufgabe. Es ist ein Punkt in einem Kreise und eine Linie gegeben. Man soll diese Linie als Sehne in den Kreis legen, daß sie durch den gegebenen Punkt gehe.

Erste Auflösung. Fig. 470. Der gegebene Kreis sey AB′BA′, der Punkt D, die Linie A′B′. Man trage von irgend einem beliebigen Punkte A′ in der Peripherie die gegebene Linie A′B′, als Sehne, in den Kreis, halbire diese Sehne und beschreibe mit der Entfernung ME′ des Halbirungspunktes E′ von dem Mittelpunkte M des Kreises AB′BA′, als Radius, den Kreis E′EG, ziehe von dem gegebenen Punkte D eine Tangente DE zu dem Kreise E′EG, verlängere sie, daß sie die Peripherie des äussern Kreises AB′BA′ durchschneide, so ist AB die gesuchte Linie.

Beweis. Man ziehe ME und ME′, so sind beide Linien als Radien eines Kreises einander gleich. Die Linie ME′ steht in der Mitte der Sehne A′B′ auf, also ist sie senkrecht zu A′B′, die Linie ME steht auf der Sehne AB senkrecht auf. Hieraus folgt, daß die Linien ME′ und ME die senkrechten Abstände der Sehnen A′B′ und AB sind. Da nun diese Abstände einander gleich sind, so folgt daraus, daß auch die ihnen zugehörigen Sehnen einander gleich sind; also ist $AB = A'B'$. Die Linie AB geht zugleich durch den Punkt D und entspricht also den Forderungen der Aufgabe.

Zweite Auflösung. Fig. 471. Man ziehe durch den gegebenen Punkt D einen Durchmesser AP in dem gegebenen Kreise, errichte auf ihm, im Punkte D, eine senkrechte Linie DE bis zum Durchschnitte E mit der Peripherie; schneide von A′ aus die gegebene Linie A′B′ auf den Durchmesser AP ab, beschreibe über AB einen Halbkreis A′FB, errichte in dem Punkte E eine Senkrechte EF bis zum Durchschnitte F des Halbkreises A′FB′ und fälle von F eine Senkrechte EG auf

A'B', so gibt der Punkt G die Theile der Sehne an, in welche die gegebene Linie durch den Punkt D zerfällt wird. Man mache daher DA = GA' und verlängere diese Linie bis zum Durchschnitte B mit der Peripherie des gegebenen Kreises, so ist die Aufgabe gelöst.

Beweis. Nach der Construction ist das Viereck DEFG ein Rechteck und also die Linie ED = FG. Ferner ist nach der Construction die Linie ED, da sie senkrecht auf dem Diameter steht, die mittlere geometrische Proportionale zwischen den Abschnitten A'D und DP. Aus dem nämlichen Grunde ist auch FG die mittlere Proportionale zwischen A'G und GB', hieraus fließen folgende Gleichungen

$$1)\quad ED^2 = A'D \,.\, DP$$

$$2)\quad FG^2 = A'G \,.\, GB'$$

also auch, da FG = ED ist,

$$3)\quad A'D \,.\, DP = A'G \,.\, GB'$$

dieß führt zu folgender Proportion

$$A'D : A'G = GB' : DP$$

Nun gilt zwischen den Abschnitten des Durchmessers A'P und zwischen denen der Sehne AB folgende Proportion

$$A'D : AD = DB : DP$$

Da nach der Construction AD = A'G ist, so folgt aus der Vergleichung der beiden Proportionen, daß auch DB = GB, und

$$AB = AD + DB = A'D + DB' = A'B'$$

ist. Die Linie AB ist der gegebenen Linie gleich, ist eine Sehne des gegebenen Kreises und geht durch den gegebenen Punkt.

Dritte Auflösung. Fig. 471. Nennt man den Durchmesser des Kreises D und den Abschnitt auf demselben A'D = a, die Sehne S und das Stück AD das zwischen der Peripherie und dem gegebenen Punkte liegt x, so hat man folgende Gleichung $a\,(D - a) = x\,(S - x)$

oder $aD - a^2 = xS - x^2$

und hieraus $(x - \tfrac{1}{2}S)^2 = a^2 - aD + \tfrac{1}{4}S^2$

also $x = \tfrac{1}{2}S \pm \sqrt{a^2 - aD + \tfrac{1}{4}S^2}$

Da der Abschnitt x größer oder kleiner, als die Hälfte der

Sehne seyn kann, so erhält man hieraus für den kleinern Abschnitt folgende Gleichung

$$x = \tfrac{1}{2}S - \sqrt{a^2 - aD + \tfrac{1}{4}S^2}$$

für den größern aber folgende

$$x = \tfrac{1}{2}S + \sqrt{a^2 - aD + \tfrac{1}{4}S^2}$$

Sind die beiden Abschnitte einander gleich, so geht der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen in o über. Hieraus fließt ferner, daß das Produkt aus dem Diameter in den kleinern Abschnitt nie größer, als das Summenquadrat dieses Abschnittes und der halben Sehne werden kann.

Die Construction der eben erhaltenen Gleichung ergibt sich aus den Lehren des zweiten Kapitels leicht.

Anmerkung. Es ist klar, daß zwei Sehnen im Kreise gezogen werden können, AB und A″B″, die beide der Aufgabe genügen, gleich groß und nur der Lage nach von einander verschieden sind.

Die Größe der als Sehne in den Kreis einzutragenden Linie ist in bestimmte Grenzen eingeschlossen. Sie kann nie größer als der Durchmesser des Kreises seyn, und nie kleiner werden, als die auf den Durchmesser im gegebenen Punkte D senkrecht gezogene Sehne EK. Nennt man diese Linie M, so ist $ED = \tfrac{1}{2}M$ und hieraus hat man folgende Gleichung

$$\tfrac{1}{4}M^2 = a\,(D - a)$$

oder

$$M^2 = 4\,(aD - a^2)$$

also

$$M = 2\sqrt{aD - a^2}$$

§. 418.

Aufgabe. Es ist eine Linie und ein Winkel gegeben. Man soll über derselben einen Kreisbogen beschreiben, der den gegebenen Winkel als Peripheriewinkel faßt. Fig. 472.

Auflösung. Die Linie sey AB, der Winkel x. Man trage die gegebene Linie AB an den gegebenen Winkel und errichte in der Spitze des Winkels zu dem Schenkel AC eine unbestimmte senkrechte Linie AD und in dem Endpunkte B der Linie AB gleichfalls eine Senkrechte bis zum Durchschnitte D mit der Senkrechten AD, beschreibe über der Linie AD, als

Durchmesser, den Kreis ADB, so ist der Kreisbogen ADB welcher dem Winkel ABC = x entgegensteht, der gesuchte Kreisbogen.

Beweis. Die Winkel DAB und BAC sind = R. In dem Dreiecke DAB sind die Winkel an der Hypotenuse gleichfalls einem Rechten gleich. Es ist also

$$m + p = p + x = R$$

und hieraus $m = x$

Demnach ist also der Peripheriewinkel m in dem über der Linie AB gezogenen Kreisbogen dem gegebenen gleich, also auch alle Winkel die über ihr in demselben gezogen werden können.

Der Beweis, daß der auf die oben beschriebene Art gezogene Kreis ADB durch den Endpunkt der Linie AB geht und daß also diese Linie eine Sehne des Kreises sey, führt sich dadurch leicht, daß man bemerkt, daß der Halbkreis der über der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks gezogen wird, immer durch den Vereinigungspunkt der beiden Katheten geht.

Anmerkung. In §. 58. ist eine andere Auflösung dieser Aufgabe gegeben. Die hier gegebene ist allgemeiner und gilt für spitze und stumpfe Winkel. Die Construction für einen rechten Winkel ist die einfachste, denn sie besteht darin, daß man über der gegebenen Linie, als Durchmesser, einen Halbkreis beschreibt.

§. 419.

Aufgabe. Es sind in der Peripherie eines bestimmten Kreises zwei Punkte gegeben. Man soll einen Durchmesser des Kreises so ziehen, daß die aus den gegebenen Punkten auf ihn gefällten Perpendickel einen der Größe nach gegebenen Theil des Durchmessers zwischen sich fassen. Fig. 473.

Auflösung. Der Kreis sey GABH, die Punkte A und B, das Stück des Halbmessers AD. Man beschreibe von dem einen Punkte A mit der Linie AD, als Halbmesser, den Bogen pDn und lege von dem andern Punkte B eine unbestimmte Tangente BD an denselben, nun ziehe man von des Kreises

Mittelpunkt M auf sie eine Senkrechte HMG bis zu den Durchschnitten mit der Peripherie, ziehe AF senkrecht auf GH, so ist FE dem gegebenen Stücke AD gleich.

Beweis. Da BE und AF senkrecht auf GH stehen, so sind sie parallel und ADEF ist ein Parallelogramm, folglich FE = AD.

Anmerkung. Die Aufgabe wird unmöglich, wenn das gegebene Stück des Diameters größer, als die Entfernung der Punkte in der Peripherie werden sollte.

§. 420.

Aufgabe. Es ist ein Kreis und ausser ihm eine Linie gegeben. Man soll von ihren Endpunkten zwei Linien an einen Punkt der Peripherie ziehen, welche in ihrem Vereinigungspunkt einen bestimmten Winkel bilden. Fig. 474.

Auflösung. Der Kreis sey DEF, die Linie AB, der Winkel x. Man beschreibe über der Linie AB nach §. 418. einen Kreisbogen ADB, welcher den gegebenen Winkel faßt, ziehe von seinem Durchschnittspunkte D mit der Peripherie des gegebenen Kreises auf die beiden Endpunkte der Linie AB die Linie DA und DB, so ist der Winkel ADB der gesuchte.

Der Beweis führt sich leicht.

Anmerkung. Es sind zwei Auflösungen ADB und AEB möglich, so lange der Bogen ADEB die Peripherie durchschneidet; nur eine, wenn er sie berührt. Die Aufgabe ist unmöglich, wenn der beschriebene Bogen sie weder durchschneidet noch berührt.

§. 421.

Aufgabe. Es ist ein Kreisabschnitt, der einen bestimmten Winkel faßt, gegeben. Man soll in ihm einen Punkt bestimmen, daß die von den Endpunkten der Sehne zu ihm gezogenen Linien in einem gegebenen Verhältnisse stehen. Fig. 475.

Auflösung. Der Kreisabschnitt sey ACB, das Verhältniß, worin die beiden Sehnen stehen sollen, sey Ac : cb. Man trage die eine der gegebenen Verhältnißlinien Ac von A auf die Sehne AB des Bogens ACB und lege an dem Endpunkte c den Winkel des Bogens = Acb an, trage auf seinen Schenkel die zweite Verhältnißlinie cb, ziehe von A durch b die Linie Ab bis zum Durchschnitte C der Peripherie des Bogens und dann CB, so stehen die Sehnen AC und CB in dem gegebenen Verhältnisse.

Beweis. In jedem der beiden Dreiecke ist der Winkel bei A enthalten, ferner ist der Winkel Acb = ACB. Dieß führt zu dem Schlusse, daß die beiden Dreiecke Abc und ABC einander ähnlich sind. Hieraus ergibt sich folgende Proportion

$$Ac : bc = AC : BC$$

der Punkt C erzeugt also die beiden Sehnen AC und CB die in dem gegebenen Verhältnisse stehen.

§. 422.

Aufgabe. Es ist ein Kreis und ausser ihm ein Punkt gegeben. Man soll von diesem Punkte aus eine Sekante zu dem Kreise ziehen, wovon der im Kreise liegende Theil eine bestimmte Größe hat. Fig. 476.

Auflösung. Der Kreis sey BCDE, der Punkt A, das innerhalb des Kreises liegende Stück der Sekante soll der Linie CB gleich seyn. Man lege die Linie DE = CB willkührlich als Sehne in den Kreis, halbire sie in F und ziehe einen, dem gegebenen concentrischen Kreis FHG, welcher die Sehne DE im Punkte F berührt, ziehe nun von dem Punkte A die Tangente AGC an den innern Kreis, so ist das innerhalb des gegebenen Kreises liegende Stück der gegebenen CB gleich.

Beweis. Die Linien DE und EB erscheinen als Tangenten des Kreises HFG und als Sehnen im Kreise CBED.

Da alle Tangenten des kleineren Kreises gleich weit von dem Mittelpunkte des Größeren entfernt liegen und zugleich Sehnen des größern sind, so sind sie alle einander gleich und es ist daher CB = DE. Die Linie CB ist zugleich das im Kreise DEBC liegende Stück der Sekante AC, und erfüllt also die Bedingungen der Aufgabe.

Anmerkung. Es zeigt sich leicht, daß es zwei Linien AC und AC′ gibt, die den Bedingungen der Aufgabe genügen. Die Aufgabe wird unmöglich, wenn die gegebene Linie größer, als der Durchmesser des Kreises seyn sollte.

B
Aufgaben über die in und um den Kreis beschriebenen Figuren.

---

§. 423.

Aufgabe. Es ist ein Dreieck gegeben. Man soll um dasselbe einen Kreis ziehen, daß die Kreislinie durch die Spitzen seiner drei Winkel gehe. Fig. 477.

Erste Auflösung. Das Dreieck sey ABC. Man halbire zwei Seiten AB und BC des Dreiecks und errichte in ihren Mittelpunkten E und D senkrechte Linien EM und DM bis zu ihrem Durchschnitte in M, so ist M der Mittelpunkt des gesuchten Kreises. Zieht man nun von M eine Linie MB auf eine der Spitzen B im Dreiecke, so ist MB der Radius, mit dem sich nun der Kreis BAC um das Dreieck beschreiben läßt.

Beweis. Berücksichtigt man, daß, nach den Bedingungen, die Aufgabe gelöst ist, wenn man den Kreis so beschreibt, daß die drei Seiten als Sehnen erscheinen, so rechtfertigt sich die gegebene Auflösung leicht, wenn man sich erinnert, daß jede Linie, die auf dem Mittelpunkte einer Sehne senkrecht steht, durch des Kreises Mittelpunkt gehen wird. Zieht man nun zwei solcher senkrechten Linien, so müssen sie beide durch den Mittelpunkt gehen. Ihr Durchschnittspunkt wird daher der Mittelpunkt des Kreises seyn.

Der Beweis läßt sich auch dadurch führen, daß man die Congruenz der Dreiecke BDM und DMC, BEM und EMA zeigt, woraus die Gleichheit der Linien CM und EM, BM und AM, also auch der Linien CM, BM und AM folgt.

Anmerkung. Mit dieser Aufgabe fällt folgende zusammen: Einen Kreis durch drei gegebene Punkte zu ziehen, denn die Punkte lassen sich durch gerade Linien zu einem Dreiecke verbinden; ferner die §. 64. gegebene Aufgabe.

Die Lage des Mittelpunktes M richtet sich nach der Gestalt des Dreieckes. Er liegt innerhalb des Dreieckes, wenn das Dreieck spitzwinklig, ausserhalb, wenn es stumpfwinklig ist. Ist das Dreieck rechtwinklig, so fällt er mit dem Mittelpunkte der Hypotenuse zusammen. In einem gleichschenkligen Dreieck liegt er in der Linie welche die Spitze des Scheitelwinkels mit dem Mittelpunkte der Grundlinie verbindet. In einem gleichseitigen Dreiecke liegt er auch in dieser Linie und stehet um den dritten Theil derselben von der Grundlinie ab.

Zweite Auflösung. Fig. 478.

Erörterung. Nimmt man an, um das Dreieck ABC sey ein Kreis beschrieben, und fällt man von A auf BC die Höhe AD, und von dem Mittelpunkte M eine senkrechte Linie ME auf die Linie AB, zieht man ferner die Linien AM und BM als Radien des Kreises, so sind die Winkel bei E und D rechte Winkel; ferner ist der Winkel BMA ein Centriwinkel und BCA ein Peripheriewinkel, welche mit einander auf dem nämlichen Bogen BA aufstehen. Der Winkel BMA ist also doppelt so groß als BCA. Die Linie ME theilt den Winkel BMA in zwei gleiche Theile, also ist EMA = DCA und demnach sind die Dreiecke EAM und ADC einander ähnlich und man gewinnt hieraus folgende Proportion

$$AD : AC = EA : AM$$

wodurch aus den drei Linien AD, AC und EA der Radius AM bestimmt werden kann.

Construction. Fig. 479. Man fälle von einem Punkte A des Dreiecks ABC eine senkrechte Linie auf die entgegenstehende Seite, halbire eine der andern Seiten AB, trage ihre Hälfte AE = AF auf die Höhe AD, errichte in F eine senkrechte Linie FG bis zum Durchschnitte mit der dritten Seite AC, so ist AG der Radius des Kreises. Beschreibt man nun mit AG von zwei Punkten A und C des Dreiecks zwei sich durchschneidende Kreisbögen, so ist ihr Durchschnittspunkt M der Mittelpunkt des gesuchten Kreises.

Der Beweis führt sich leicht aus der oben gegebenen Erörterung.

Anmerkung. Ist das Dreieck spitzwinklig, so muß der Mittelpunkt in das Dreieck fallen; ist es stumpfwinklig, so wird er

ausserhalb des Dreiecks, aber immer über die dem stumpfen Winkel entgegenstehende Seite fallen.

Dritte Auflösung. Setzt man die Linie BC = G, AB = K und AC = k, die Höhe AD = h, so hat man nach der zweiten Auflösung Fig. 478. folgende Proportion

$$h : k = \tfrac{1}{2}K : r$$

und es ist also der Radius des Kreises

$$1)\quad r = \frac{k \,.\, K}{2h}$$

Bestimmt man nun die Höhe eines Dreiecks durch seine drei Seiten, so ist

$$h = \frac{1}{2 \,.\, G} \sqrt{(G + k + K)(G + k - K)(G + K - k)(K + k - G)}$$

Eine Gleichung, die hier als bekannt voraus gesetzt wird. Führt man diesen Werth in die Gleichung ein, so bestimmt sich die Größe des Radius durch folgende Formel

$$2)\quad r = \frac{k \,.\, K \,.\, G}{\sqrt{(G+k+K)(G+k-K)(G+K-k)(K+k-G)}}$$

§. 424.

Aufgabe. Es ist ein Rechteck gegeben. Man soll um dasselbe einen Kreis beschreiben. Fig. 480.

Erste Auflösung. Das Rechteck sey ABCD. Man ziehe die beiden Diagonalen AC und BD im Rechtecke, so ist ihr Durchschnittspunkt M der Mittelpunkt des gesuchten Kreises. Beschreibt man nun mit MD der Entfernung dieses Mittelpunktes M von einer Ecke D, als Radius, einen Kreis, so ist ABCD ein Kreis, welcher um das Rechteck beschrieben ist.

Beweis. Die Seiten AD und BC sind gleich und parallel. Aus der Parallelität dieser Linien folgt die Gleichheit der Wechselwinkel x und x′, y und y′. Hieraus und aus der Gleichheit der Seiten folgt die Congruenz der Dreiecke BMC und AMD und hieraus die Gleichheit der Linien MA, MD, MC, MB; der Punkt M ist also von den Punkten A, B, C, D gleichweit entfernt, folglich der gesuchte Mittelpunkt.

Zweite Auflösung. Nennt man die eine Seite des Rechtecks h, die andere G, so bestimmt sich die Diagonale AC des Rechtecks nach dem pythagorischen Lehrsatze durch folgende Gleichung $AC = \sqrt{(h^2 + G^2)}$

Nun ist nach den Bemerkungen zu der vorigen Auflösung der Radius die Hälfte der Diagonale, also ist

$$r = AM = \tfrac{1}{2} AC = \tfrac{1}{2} \sqrt{h^2 + G^2} = \sqrt{\tfrac{1}{4} h^2 + \tfrac{1}{4} G^2}$$

Hieraus fliest folgende Construction: Man halbire die Nachbarseiten des Rechtecks durch zwei senkrechte Linien EM und FM, so ist ihr Durchschnitt M der Mittelpunkt des gesuchten Kreises.

Anmerkung. Ist um ein Quadrat ein Kreis zu beschreiben, so ändert dieß an der Auflösung nichts. Der Radius des um ein Quadrat beschriebenen Kreises bestimmt sich aus obiger Gleichung leicht, wenn man berücksichtigt, daß alle Seiten eines Quadrates einander gleich sind. Demnach ist, wenn a die Seite des Quadrates bedeutet,

$$r = \tfrac{1}{2} \sqrt{(2 a^2)} = \tfrac{1}{2} \sqrt{(a^2)} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

§. 425.

Aufgabe. Es ist ein Viereck gegeben, worin sich zwei gegenüberstehende Winkel zu zwei Rechten ergänzen. Man soll um dasselbe einen Kreis beschreiben Fig. 481.

Auflösung. Das gegebene Viereck sey ABCD. Man halbire zwei anliegende Seiten AD und DC durch senkrechte Linien bis zu ihrem Durchschnitte M, so ist M der Miteelpunkt des Kreises. Zieht man nun von M auf irgend eine Ecke D des Vierecks die Linie MD, so ist MD der Radius des Kreises, womit sich der Kreis ABCD beschreiben läßt.

Beweis. Daß die Kreislinie durch die Punkte A, D, C gehen wird, erhellt aus den Bemerkungen zu der Aufgabe §. 423. Es ist daher noch zu beweisen, daß er auch durch den vierten Punkt B des Vierecks ABCD gehen müsse. Dieß beweist sich leicht, wenn man die Diagonale AC ziehet, denn es

stellen sich dann die Winkel ADC und ABC als entgegengesetzte Peripheriewinkel eines Kreises dar, die sich zu zwei Rechten ergänzen. Die beiden Winkel ergänzen sich nach den Bedingungen der Aufgabe, also geht der Kreis ABCD durch ihre Spitzen B und D und die Auflösung entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Anmerkung. Fig. 482. Ist ein Paralleltrapez ABCD, dessen gegenüberstehende Winkel sich zu zwei Rechten ergänzen, gegeben, und ist verlangt, um dasselbe einen Kreis zu beschreiben, so verfahre man wie vorhin.

Um alle Vierecke, die nicht die genannten Eigenschaften haben, lassen sich keine Kreise beschreiben.

Um alle regelmäßigen Vielecke lassen sich leicht Kreise beschreiben, wenn man zwei Nachbarseiten durch senkrechte Linien halbirt. Ihr Durchschnitt ist des Kreises Mittelpunkt. Hat irgend ein irreguläres Vieleck die Eigenschaft, daß sich um dasselbe ein Kreis beschreiben läßt, so führt das nämliche Verfahren zum Ziele.

§. 426.

Aufgabe. Es ist ein Dreieck gegeben. Man soll in dasselbe einen Kreis beschreiben. Fig. 483.

Erste Auflösung. Das Dreieck sey ABC. Man halbire zwei Winkel des Dreiecks ABC und BCA und verlängere die Halbirungslinien bis zum Durchschnitte M, so ist M des Kreises Mittelpunkt. Fällt man nun von M auf irgend eine Seite ,DC, eine senkrechte Linie MD, so ist MD der Radius des gesuchten Kreises. Es läßt sich nun damit leicht der gesuchte Kreis FDE beschreiben.

Beweis. Die Dreiecke MDC und MCE sind congruent, denn es ist die Linie MC = MC, und nach der Construction der Winkel r = r′ und x = x′; also ist die Linie DM = EM. Auf gleiche Weise zeigt es sich, daß EM = FM ist, und daß also die drei Linien DM, ME und MF gleich sind. Alle diese Linien stehen auf den zugehörigen Seiten senkrecht und mit einer von ihnen ist der Kreis FDE beschrieben, also sind die drei Seiten Tangenten des Kreises und FDE ist in das Dreieck beschrieben.

Zweite Auflösung. Fig. 483. Man suche den Ueberschuß zweier Seiten BC und AC über die dritte BA, also DE $= BC + AC - BA$, halbire diesen Unterschied und schneide von dem Vereinigungspunkt C der beiden Seiten den halben Unterschied $CE = DC = \frac{1}{2} DE$ ab, errichte in den Punkten E und D senkrechte Linien bis zu ihrem Durchschnitte M, so ist M des Kreises Mittelpunkt und es läßt sich demnach leicht der gesuchte Kreis DFE beschreiben.

Beweis. Da alle drei Seiten als Tangenten des Kreises erscheinen müssen, so sind die Stücke zweier Nachbarseiten, die zwischen dem Berührungspunkte und ihrem Vereinigungspunkte liegen, einander gleich, und es ist

$$FA = AE, \; FB = BD, \; DC = CE$$

also auch
$$BD + DC + EC + AE - (BF + FA) =$$
$$= DC + EC = DE$$

Halbirt man die Ueberschußlinie DE, und trägt ihre Hälfte auf CB und CA auf, so sind die Endpunkte E und D die Berührungspunkte. Werden dann die Senkrechten errichtet, so führen sie zu des Kreises Mittelpunkt, und es läßt sich alsdann leicht zeigen, daß die senkrechten Linien DM, EM und FM einander gleich sind.

Dritte Auflösung. Setzt man die Seite $BC = G$, $BA = K$, $AC = k$ und berücksichtigt man, daß die drei Dreiecke BMC, BMA und AMC zusammen dem Dreiecke ABC gleich kommen, so bestimmt sich der Flächeninhalt der Dreiecke durch die Seiten und den Radius des Kreises, und es ist, wenn man den Radius des Kreises x nennt,

$$\triangle BMC = \tfrac{1}{2} G.x, \; \triangle AMC = \tfrac{1}{2} k\,x, \; \triangle BMA = \tfrac{1}{2} K\,x$$

und demnach

$$1) \; \triangle ABC = \tfrac{1}{2}(G.x + k\,x + K\,x) = \tfrac{1}{2}(G + k + K).\,x$$

Der Inhalt eines Dreiecks läßt sich bekanntlich nach folgender Gleichung durch die drei Seiten des Dreiecks darstellen

$$2) \; \triangle ABC = \tfrac{1}{4}\sqrt{(G+k+K)(G+k-K)(G+K-k)(K+k-G)}$$

die Gleichungen 1 und 2 führen zu folgender

$$x.\tfrac{1}{2}(G+k+K) = \tfrac{1}{4}\sqrt{(G+k+K)(G+k-K)(G+K-k)(K+k-G)}$$

und hieraus bestimmt sich der Radius des Kreises aus den drei Seiten des Dreiecks

$$3)\ r = x = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(G+k-K)(G+K-k)(K+k-G)}{G+k+K}}$$

§. 427.

Aufgabe. Es ist ein Quadrat gegeben. Man soll in dasselbe einen Kreis beschreiben. Fig. 484.

Erste Auflösung. Das Quadrat sey ABCD. Man ziehe die beiden Diagonalen, so ist ihr Durchschnittspunkt M der Mittelpunkt des gesuchten Kreises. Fällt man nun von M auf irgend eine Seite eine Linie MC senkrecht, so ist diese der Radius des Kreises, womit sich sodann der gesuchte Kreis abcd beschreiben läßt.

Beweis. Aus der Congruenz der Dreiecke McC, MCd, MdD, MaD u. s. w., die sich leicht beweisen läßt, folgt die Gleichheit der Linien Mc, Md, Ma, Mb, durch deren Endpunkte der Kreis abcd geht. Daraus, daß diese Linien auf den Seiten des Quadrates senkrecht stehen, folgt ferner: daß die Seiten des Quadrates Tangenten des Kreises sind und daß also der gefundene Kreis in das Quadrat eingeschrieben ist.

Zweite Auflösung. Man halbire die Quadratseiten und ziehe die Halbirungslinien ac und bd, so ist ihr Durchschnittspunkt des Kreises Mittelpunkt und die halbe Quadratseite des Kreises Radius, woraus sich sofort der Kreis abcd leicht in das Quadrat einschreiben läßt.

Anmerkung. Sind Vielecke von solcher Beschaffenheit gegeben, daß sich in sie ein Kreis beschreiben läßt, so geschieht dieß im Allgemeinen dadurch, daß man zwei Winkel halbirt, die Halbirungslinien bis zum Durchschnitte verlängert, wodurch sofort des Kreises Mittelpunkt gegeben ist. Fällt man nun von diesem Punkte auf irgend eine Seite eine senkrechte Linie, so ist diese der Radius des Kreises, womit sich sofort der Kreis beschreiben läßt.

Am zweckmäßigsten wählt man hiezu die Winkel, deren Halbirungslinien sich entweder unter einem rechten Winkel oder doch unter einem, diesem ziemlich nahekommenden, Winkel durchschneiden.

§. 428.

Aufgabe. Es ist ein Dreieck gegeben. Man soll in dasselbe einen Halbkreis beschreiben. Fig. 485.

Auflösung. Das Dreieck sey ABC. Man halbire einen Winkel A im Dreiecke und verlängere die Halbirungslinie bis zum Durchschnitte M der gegenüberstehenden Seite, fälle von M senkrechte Linien MD, ME auf die beiden andern Seiten, so sind diese Radien des einzuschreibenden Halbkreises.

Beweis. Die Linie AM, als Halbirungslinie, muß durch des Kreises Mittelpunkt gehen. Werden von dem Durchschnittspunkte M die senkrechten Linien ME und MD auf AC und AB gefällt, so entstehen die Dreiecke ADM und AEM, welche wegen der Linie AM, der gleichen Winkel x und x', r und r' congruent sind. Demnach ist DM = ME und AD und AC sind Tangenten des Halbkreises, folglich ist die Aufgabe gelöst.

§. 429.

Aufgabe. Es ist ein Quadrant gegeben. Man soll in denselben einen Kreis beschreiben. Fig. 486.

Erörterung. Der Quadrant sey BACE. Man nehme an der Kreis DEF sey in denselben gegeben. Soll der eingeschriebene Kreis die beiden Radien AB und AC berühren, so muß sein Mittelpunkt M in der Linie liegen, welche den rechten Winkel BAC halbirt; zieht man nun von des Kreises Mittelpunkt M dit Radien MD und MF zu den Berührungspunkten D und F, so stehen diese senkrecht auf, und es folgt hieraus, daß der Winkel DMF ein Rechter seyn muß. Zieht man von D und F zu dem Durchschnittspunkte der Halbirungs-Linie E die Linien DF und FE, so erscheint der durch sie gebildete Winkel DEF als Peripheriewinkel, dessen Centriwinkel ein Rechter ist, also ist DEF = $\frac{1}{2}$R. Die Linie AE theilt die beiden Winkel bei M und E in gleiche Theile. Hieraus ergibt sich folgende

Construction. Man halbire den Winkel BAC durch

die Linie AE, trage an den Punkt E auf beiden Seiten der Linie EA den Winkel AEF = AED = $\frac{1}{4}$R und verlängere ihre Schenkel bis zu den Durchschnitten D und F, errichte in D und F die Linien DM oder FM senkrecht bis zum Durchschnitte M der Halbirungslinie AE, so ist DM der Halbmesser. Mit ihm läßt sich leicht der gesuchte Kreis DEF beschreiben.

Der Beweis ergibt sich leicht aus den Bemerkungen zu der Erörterung.

§. 430.

Aufgabe. Es ist ein Kreis gegeben. Man soll in denselben ein Dreieck beschreiben, das einem andern ähnlich ist. Fig. 487.

Auflösung. Der Kreis sey ABC, das Dreieck A'B'C', seine Winkel y, z, x. Man lege an irgend einen Punkt A der Peripherie eine Tangente DAE, trage auf AE den einen Winkel x und auf AD den Winkel y, verlängere die hierdurch entstehenden Schenkel bis zu den Durchschnitten C und B der Peripherie des gegebenen Kreises und ziehe BC, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Nach §. 418. ist jeder Winkel, welcher eine Tangente mit einer Sehne macht, dem Peripheriewinkel im entgegengesetzten Abschnitte gleich, also ist der Winkel

$$x = ABC \text{ und } y = ACB$$

und ferner ist, da zwei Winkel eines Dreiecks den dritten bestimmen, der Winkel BAC = 2 R — x — y = z. Das Dreieck ABC enthält also die gegebenen drei Winkel und erfüllt die Bedingungen der Aufgabe.

Anmerkung. Soll ein gleichseitiges Dreieck in einen Kreis gezeichnet werden, so trage man den Radius sechsmal im Kreise herum, Fig. 488., und verbinde immer die zwei Endpunkte je zweier anliegenden Radien, so ist ABC das gesuchte gleichseitige Dreieck.

§. 431.

Aufgabe. Es ist ein Kreis gegeben. Man soll um

denselben ein Dreieck beschreiben, das einem gegebenen ähnlich ist.

Erste Auflösung. Fig. 489. Der Kreis sey abc, das Dreieck ABC, seine Winkel x, y, z. Man trage an den Mittelpunkt des Kreises einen Winkel aMc = 2 R — x, welcher die Ergänzung des Dreiecks-Winkels x zu zweien Rechten ist, und verlängere seine Schenkel Ma und Mc bis zur Peripherie; an einen dieser Radien aM trage man ferner einen Winkel aMb, welcher die Ergänzung des andern Dreieckswinkels y zu zwei Rechten ist, ziehe den hiedurch entstehenden Schenkel Mb bis zur Peripherie. Nun ziehe man durch die drei Punkte a, b, c Tangenten zum Kreise, verlängere sie bis zu ihren Durchschnitten A, B, C, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis. In dem Vierecke BaMb stehen die Radien Ma und Mb senkrecht auf, also sind bei a und b rechte Winkel und folglich ist die Summe der Winkel M und B zweien Rechten gleich.

Da nun der Winkel aMb = 2R — y, so ist der Winkel aBb = 2 R — aAb = 2 R — (2 R — y) = y. Auf gleiche Art wird bewiesen, daß der Winkel BAC = x und folglich daß BCA = 2 R — x — y = z ist. Das Dreieck ABC ist also um den Kreis beschrieben und dem gegebenen ähnlich.

Zweite Auflösung. Fig. 490. Man lege an irgend einen Punkt a des Kreises abc eine Tangente MN und beschreibe nach §. 430. in den Kreis ein Dreieck abc, das dem gegebenen ähnlich ist; nun halbire man seine Seiten und ziehe durch ihre Halbirungspunkte d, e, f Radien bis zu ihren Durchschnitten g, h und k mit der Peripherie des Kreises, lege durch diese Punkte Tangenten und verlängere sie bis zu ihren Durchschnitten A, B und C, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Der Beweis führt sich dadurch leicht, daß die Seiten des um den Kreis beschriebenen Dreiecks ABC parallel laufen mit den Seiten des in den Kreis beschriebenen Dreiecks abc, woraus hervorgeht, daß beide einander und dem gegebenen ähnlich sind.

§. 432.

Aufgabe. Es ist ein Kreis gegeben. Man soll in denselben ein Quadrat beschreiben. Fig. 491.

Erste Auflösung. Der Kreis sey ABCD. Man errichte in dem Mittelpunkte M des Kreises zwei Durchmesser AC und BD senkrecht auf einander und verbinde ihre Endpunkte A, B, C und D durch gerade Linien mit einander, so ist ABCD das gesuchte Quadrat.

Der Beweis führt sich leicht, wenn man berücksichtigt, daß die Dreiecke AMB, AMD, DMC, BMC einander congruent, also auch die Linien AB, AD, BC und CD einander gleich sind und daß jeder Winkel des Vierecks ein Peripheriewinkel ist, der auf des Kreises Durchmesser mit den Endpunkten seiner Schenkel aufsteht.

Zweite Auflösung. Nennt man des Kreises Durchmesser r, und berücksichtigt man, daß das Quadrat in vier congruente gleichschenklige rechtwinklige Dreiecke zerlegt wird, so bestimmt sich hieraus die Seite des einzuschreibenden Quadrates leicht, und es ist nach dem pythagoräischen Lehrsatze

$$BC = \sqrt{(r^2 + r^2)} = \sqrt{(2 r^2)} = r \sqrt{2}$$

§. 433.

Aufgabe. Es ist ein Kreis gegeben. Man soll um ihn ein Quadrat beschreiben. Fig. 484.

Auflösung. Der Kreis sey abcd. Man errichte zwei Durchmesser ac und bd senkrecht auf einander und auf ihren Endpunkten a, b, c, d Tangenten bis zu ihren Durchschnitten A, B, C, D, so ist ABCD das gesuchte Quadrat; denn es läßt sich leicht beweisen, daß die Seiten AB, BC, CD, DA einander gleich und die Winkel lauter Rechte sind.

§. 434.

Aufgabe. Es ist ein Kreis gegeben. Man soll in denselben ein regelmäßiges Fünfeck einschreiben. Fig. 492.

Auflösung. Der Kreis sey ABCDE. Man ziehe den Radius ME, errichte an seinem Endpunkte E eine senkrechte Linie EF, mache EF = $\frac{1}{2}$ME und ziehe die Linie MF. Nun schneide man von MF die Linie FG = FE ab und trage die Linie MG = Ee = eA = Aa = ... in der Peripherie des Kreises herum, so wird sie sich zehnmal herum tragen lassen. Nun verbinde man die Endpunkte immer zweier Abschnitte durch gerade Linien, so ist ABCDE das gesuchte reguläre Fünfeck.

Beweis. Der Radius des Kreises ME ist nach der Construction (§. 177.) in das innere und äussere Verhältniß getheilt worden. Bildet man nun aus ME = Me, als Schenkel, und MG = MH = Ee, als Grundlinie, das gleichschenklige Dreieck MEe, so ist in ihm der Winkel an der Grundlinie doppelt so groß, als der Scheitelwinkel, folglich ist der Winkel EMe = 36°. Berücksichtigt man nun, daß alle Winkel um den Mittelpunkt 360° betragen, so muß sich der Winkel EMe zehnmal um den Mittelpunkt, und folglich auch die seinem Bogen eE zugehörige Sehne zehnmal in der Peripherie herum tragen lassen. Wird daher die Linie eE = MG im Kreise zehnmal herumgetragen, so entsteht ein regelmäßiges Zehneck. Verbindet man die Endpunkte immer zwei auf einander folgender Sehnen durch eine gerade Linie, so entsteht sofort ein regelmäßiges Fünfeck.

Zweite Auflösung. Fig. 493. Man beschreibe in den gegebenen Kreis nach §. 213. und §. 430. ein gleichschenkliges Dreieck ACD, dessen Scheitelwinkel 36° beträgt, schneide von C aus die Sehne BC = CD und von D aus DE = CD ab, ziehe die Linien AB, CB, AE, ED, so ist ABCDE das gesuchte reguläre Fünfeck.

Beweis. Nach der Construction ist der Winkel CAD ein Peripheriewinkel von 36°, folglich ist der Centriwinkel, welcher dem Bogen CD zugehört, 72°. Der Bogen eines Centriwinkels von 72° ist fünfmal in der Peripherie enthalten. Trägt man also die Sehne des Bogens CD in dem Kreise herum, so muß sie sich fünfmal eintragen lassen und lauter gleiche Seiten erzeugen. Die Figur ABCDE ist daher ein regelmäßiges Fünfeck.

Anmerkung. Mit dieser Aufgabe ist zugleich die Aufgabe: ein regelmäßiges Zehneck in einen Kreis zu beschreiben, gelöst. Die erste Auflösung beruht hierauf; die zweite Auflösung führt darauf, wenn man jeden Bogen halbirt.

§. 435.

Aufgabe. Es ist ein Kreis gegeben. Man soll um ihn ein regelmäßiges Fünfeck beschreiben. Fig. 494.

Auflösung. Man beschreibe nach dem vorhergehenden §. ein regelmäßiges Fünfeck in den Kreis, halbire seine Seiten, ziehe von dem Mittelpunkte durch die Halbirungspunkte Radien und lege durch ihre Endpunkte Tangenten bis zu ihren Durchschnittspunkten, so ist das hiedurch entstandene Fünfeck regelmäßig und um den Kreis beschrieben.

§. 436.

Aufgabe. Es ist ein Kreis gegeben. Man soll in ihn ein regelmäßiges Sechseck beschreiben.

Auflösung. Fig 495. Der Kreis sey ABCDEF. Man trage den Radius des gegebenen Kreises sechsmal im Kreise herum und ziehe die Linien AB, BC, CD, DE, EF, FA, so ist ABCDEF das gesuchte Sechseck.

§. 437.

Aufgabe. Es ist ein Kreis gegeben. Man soll um ihn ein regelmäßiges Sechseck beschreiben. Fig. 495.

Auflösung. Der Kreis sey ABCDEF. Man trage den Radius sechsmal in der Peripherie herum, halbire die Sehnen durch die Radien Ma, Mb, Mc .... und errichte auf ihren Endpunkten Tangenten bis zu ihren Durchschnitten, so ist A'B'C'D'E'F' das gesuchte Sechseck.

Anmerkung. Aus diesen und den vorhergehenden Aufgaben entnimmt sich leicht das Verfahren ein Vieleck um einen Kreis aus einem, in den Kreis beschriebenen, Vielecke herzuleiten.

§. 438.

Aufgabe. Es ist ein Kreis gegeben. Man soll in denselben ein rechtwinkliges Dreieck beschreiben, das einen gegebenen Inhalt habe. Fig. 496.

Erörterung. Der Kreis sey ABC, die Seite des als Quadrat dargestellten Flächeninhaltes sey BF. Das gesuchte Dreieck sey gefunden und sey ABC, so ist klar, daß der Durchmesser des Kreises die Hypotenuse BC des gesuchten Dreieckes bilden müsse, weil es ein rechtwinkliges werden soll. Da der Inhalt eines Dreiecks durch die Hypotenuse und die auf sie gefällte Höhe ausgedrückt wird, so ist, wenn man die Hypotenuse $BC = 2r = H$ und die Höhe x nennt, der Flächeninhalt des gesuchten Dreiecks ABC durch das Produkt der Hypotenuse in die halbe Höhe bestimmt, also $\frac{1}{2}H \cdot x$. Da nun dieser Inhalt dem gegebenen Flächeninhalt gleich seyn soll, so gewinnt man hieraus folgende Gleichung

$$\tfrac{1}{2}Hx = BF^2$$

und dieß führt zu folgender Proportion

$$H : BF = BF : \tfrac{1}{2}x$$

und diese zu folgender

Construction. Man ziehe den Durchmesser BC im gegebenen Kreise und trage von dem einen Endpunkte B die Quadratseite BF, als Sehne, in den Kreis, fälle von F auf den Durchmesser BC die senkrechte Linie FK, so ist der zwischen K und B gelegene Abschnitt der Hypotenuse die halbe Höhe. Nimmt man nun BK doppelt oder $BE = 2BK$ und errichtet BE auf irgend einem Punkte, B, der Linie BC die Linie BE senkrecht und zieht durch ihren Endpunkt E mit BC die Parallele EA bis zu ihrem Durchschnitte A mit der Peripherie des Kreises und zieht dann AB und AC, so ist ABC das gesuchte rechtwinklige Dreieck.

Die Richtigkeit der Construction beruht darauf, daß die Sehne BF die mittlere geometrische Propotionale zwischen der Hypotenuse und dem ihr anliegenden Abschnitte BK und also $H : BF = BF : BK$ ist.

Da

Da nun auch die Proportion

$$H : BF = BF : \tfrac{1}{2}x$$

gilt, so folgt hieraus, daß $\frac{1}{2}x = BK$, oder daß BK die Hälfte der gesuchten Höhe ist. Nimmt man ihr Zweifaches, so ist dieses die Höhe des gesuchten Dreiecks. Aus ihr und der Hypotenuse läßt sich nun das Dreieck ABC leicht nach §. 115. bilden.

Anmerkung. So lange die Parallele EA die Peripherie des Kreises durchdringt, sind zwei auflösende Dreiecke ABC und A'BC möglich, die aber nur ihrer Lage nach von einander verschieden sind. Berührt die Linie EA den Halbkreis, so ist nur ein Dreieck möglich, und zwar ein gleichschenklig = rechtwinkliges. Die Aufgabe ist unmöglich, wenn die Parallele EA den Kreis weder durchschneidet noch berührt; also wenn die gesuchte Höhe, oder die dritte Proportionale zu dem Durchmesser und der Quadratseite größer, als der Halbmesser des gegebenen Kreises ist.

§. 439.

Aufgabe. Es ist ein Kreis gegeben und der Flächeninhalt eines Rechtecks. Man soll in den Kreis ein Rechteck beschreiben, das den gegebenen Flächeninhalt hat. Fig. 497.

Erörterung. Der Kreis sey ABEC, der als Quadrat dargestellte Flächeninhalt sey BF^2. Nimmt man an: das in den Kreis ABFC geschriebene Rechteck sey das gesuchte, und zieht man die Diagonale BC, so wird diese Diagonale BC das Rechteck ABEC in zwei congruente rechtwinklige Dreiecke ABC und EBC zerfällen, und daher durch den Mittelpunkt M des Kreises ABEC gehen. Der Flächeninhalt des Rechtecks ist daher dem Flächeninhalt der beiden Dreiecke gleich. Die Auflösung dieser Aufgabe fällt daher mit der vorigen zusammen und beruht darauf, die den beiden Dreiecken ABC und EBC zugehörige Höhe AD zu finden. Setzt man die Hypotenuse $BC = H$ und die Höhe $AD = x$, so hat man für den Flächeninhalt des Rechtecks $\frac{1}{2}Hx + \frac{1}{2}H.x = Hx$, und dieser Inhalt muß dem gegebenen gleich seyn. Dieß führt zu folgender Gleichung $Hx = BF^2$

und diese zu folgender Proportion

$$H : BF = BF : x$$

Diese Proportion aber zu folgender

Auflösung. Man ziehe den Durchmesser des Kreises BC und trage von dem einen Endpunkte B die Quadratseite des Flächeninhaltes BF, als Sehne, in den Kreis und fälle von F auf BC die senkrechte Linie FK, so ist BK die gesuchte Höhe. Nun trage man KB = KQ senkrecht auf KF und ziehe durch Q eine Parallele mit BC bis zum Durchschnitte A mit der Peripherie des Kreises, ziehe AB und AC, trage von C aus die Linie CE = AB, als Sehne, in den Kreis und ziehe dann BE, so ist ABEC das gesuchte Rechteck.

Beweis. Die Richtigkeit der Construction beruht darauf, daß BF die mittlere geometrische Proportionale zwischen BK und BC ist, dadurch gewinnt man die Proportion

$$BC : BF = BF : BK$$

Vergleicht man diese mit der oben gegebenen

$$BC : BF = BF : x$$

so fließt hieraus die Folgerung, daß x = BK, also der gesuchten Höhe gleich ist. Wird nun mit BC und AD = x das rechtwinklige Dreieck ABC gebildet, so bestimmen die Linien BC und AD den Inhalt desselben und er ist $\frac{1}{2}$ BC . AD = $\frac{1}{2}$ H . x. Beschreibt man mit EC = AB über dem Durchmesser BC das rechtwinklige Dreieck EBC, so zeigt sich leicht, daß beide congruent sind und daß BE = AC ist, und bei E und A rechte Winkel sind, also auch daß ABEC ein Rechteck ist. Da BEC mit BAC congruent ist, so ist auch der Inhalt beider gleich groß, also BCE = $\frac{1}{2}$Hx und hieraus hat man nun den Inhalt des Rechtecks ABEC = $\frac{1}{2}$Hx + $\frac{1}{2}$Hx = Hx = BF^2. Das Rechteck erfüllt also die Bedingungen der Aufgabe.

Anmerkung. Da die Parallele AQA′ zweimal die Peripherie des Kreises durchschneidet, so sind auch zwei auflösende Rechtecke möglich. Es ist nur eins möglich, wenn AQ den Kreis berührt. Die Aufgabe wird unmöglich, wenn die Linie AQ den Kreis weder durchschneidet, noch berührt.

Die Gränze, bis zu welcher die gesuchte Höhe wachsen kann, ist der Halbmesser. Hieraus bestimmt sich auch die Größe des als

Quadrat dargestellten Flächeninhalts, bis zu welcher er sich erheben kann. Sie ist die Hypotenuse eines gleichschenklig = rechtwinkligen Dreiecks, dessen Kathete der Halbmesser des gegebenen Kreises ist, also

$$BF = \sqrt{(2r^2)} = r\sqrt{2}$$

wenn r den Halbmesser bedeutet. Wird BF größer, so ist die Aufgabe unmöglich.

Hieraus folgt umgekehrt, daß der Halbmesser des Kreises nicht kleiner seyn darf, als die Kathete eines gleichschenklig = rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse BF ist.

Hieran schließt sich ferner die Bemerkung, daß das Quadrat unter allen Rechtecken im Kreise den größern Flächeninhalt hat.

§. 440.

Aufgabe. Es ist die Seite eines Dreiecks, ein ihr anliegender Winkel und der Radius des umschriebenen Kreises gegeben. Man soll das Dreieck bilden. Fig. 498.

Auflösung. Der Radius sey MA, die Seite AB und der Winkel x. Man beschreibe mit MA den Kreis ABC, trage die gegebene Seite AB in den Kreis und an einen ihrer Endpunkte A den Winkel x = BAC, verlängere seinen Schenkel AC bis zum Durchschnitte C der Peripherie, ziehe BC, so ist ABC das gesuchte Dreieck, wie sich leicht zeigen läßt.

Anmerkung. Ist der Radius des umschriebenen Kreises, eine Seite und der ihr gegenüberstehende Winkel gegeben, so ist die Aufgabe selbst unbestimmt, und es lassen sich hieraus unzählig viele Dreiecke bilden, die den Anforderungen der Aufgabe genügen. Dieß geht auch schon daraus hervor, daß durch eine Seite der ihr im Kreise gegenüber liegende Winkel schon bestimmt ist und also nur zwei Elemente statt drei gegeben sind.

§. 441.

Aufgabe. Es sind zwei Winkel eines Dreiecks und der Radius des umschriebenen Kreises gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden. Fig. 499.

Auflösung. Der Radius sey MB, die Winkel x und y. Man beschreibe mit MB einen Kreis ABC und ziehe beliebig

einen Halbmesser MB, beschreibe mit MB, als Hypotenuse, und dem Winkel x = BMD ein rechtwinkliges Dreieck BMD, worin die Spitze des Winkels x im Mittelpunkte M des Kreises liegt, verlängere BD bis zum Durchschnitte C der Peripherie, trage an C den Winkel BCA = y, verlängere seinen Schenkel CA bis zum Durchschnitte A mit der Peripherie und ziehe BA, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Man ziehe den Halbmesser MC, so erhellt aus der Construction, daß die Dreiecke BMD und DMC congruent und also die Winkel x und x' einander gleich sind und der Winkel BMC = x + x' = 2x.

Nun ist der Winkel BMC der Centriwinkel des Bogens BFC, der Winkel BAC ist der Peripheriewinkel des nämlichen Bogens, also ist BMC = 2BAC und folglich der Winkel

$$BAC = \tfrac{1}{2}BMC = \tfrac{1}{2}.2x = x$$

Der Winkel BCA ist dem gegebenen Winkel y gleich, also erfüllt das Dreieck ABC die Bedingungen der Aufgabe.

Anmerkung. Ist einer von den gegebenen Winkeln stumpf, so wird man am zweckmäßigsten den spitzen Winkel in den Mittelpunkt M des Kreises antragen.

Die Auflösung dieser Aufgabe ist eine zweite Auflösung für die §. 430. gegebene Aufgabe: In einen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, welches einem gegebenen ähnlich ist.

§. 442.

Aufgabe. Es ist die Summe zweier Seiten, ein nicht eingeschlossener Winkel und der Radius des umschriebenen Kreises gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden.

1) Die gegebene Summe sey BE, der Radius MB und der Winkel x sey spitz. Fig. 500.

Erste Auflösung. Man beschreibe mit BM einen Kreis ABC und bilde aus BM, als Hypotenuse, dem Winkel x = BMD, als Winkel an des Kreises Mittelpunkt, das rechtwinklige Dreieck BMD, verlängere BD und trage auf sie die gegebene Sum-

menlinie BE an, lege den Ueberschuß CE der Summenlinie über die Sehne BC, als Sehne, in den größern Kreisabschnitt BAC, daß AC = CE wird, und ziehe AB, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Man ziehe den Halbmesser MC, so folgt aus der Construction, daß die Dreiecke BMD und DMC congruent und also die Winkel x und x' einander gleich sind, und ferner: daß der Winkel BMC = 2x ist. Da der Winkel BMC der Centriwinkel und BAC der Peripheriewinkel des nämlichen Bogens ist, so ist der Winkel

$$BAC = \tfrac{1}{2} BMC = \tfrac{1}{2} . 2x = x$$

Nun ist nach der Construction

$$BC + CA = BC + CE = BE$$

Also erfüllt das Dreieck ABC die Bedingungen der Aufgabe.

2) Die gegebene Summe sey BE, der Radius MB, der gegebene Winkel x sey stumpf. Fig. 501.

Zweite Auflösung. Man beschreibe mit MB den Kreis BAC und bilde aus MB, als Hypotenuse, einem Winkel BMD = 2R — x, als Winkel an des Kreises Mittelpunkt, das rechtwinklige Dreieck BMD, verlängere BD und trage auf sie die Summenlinie BE an. Nun lege man den Ueberschuß CE ausserhalb des Kreises, als Sehne, in den kleinern Kreisabschnitt BAC, so daß CA = CE werde und ziehe BA, so ist BAC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Man ziehe MC, so sind nach der Construction die beiden Dreiecke BMD und DMC congruent, also auch die Winkel y und y' einander gleich, folglich der Winkel BMC $= y + y' = 2(2R - x) = 4R - 2x$. Hieraus bestimmt sich die Größe des erhabenen Winkels BMC und es ist $> BMC = 4R - < BMC = 4R - (4R - 2x) = 2x$ Mit dem erhabenen Centriwinkel BMC steht der Peripheriewinkel BAC auf gleichem Bogen BGC, also ist der Winkel

$$BAC = > \tfrac{1}{2} BMC = \tfrac{1}{2} . 2x = x$$

Nun ist ferner BC + CA = BC + CE = BE. Also erfüllt das Dreieck ABC die Bedingungen der Aufgabe.

Anmerkung 1. Die Aufgabe für einen spitzen Winkel (Fig. 500.) ist so lange möglich, als der Ueberschuß CE, oder die zweite

Seite AC eben so groß oder kleiner, als der doppelte Halbmesser des gegebenen Kreises ist. Ist die Linie AC größer, als der Durchmesser des gegebenen Kreises, so wird sie unmöglich, weil dann kein Berührungs- oder Durchschnittspunkt mit der Kreislinie möglich ist.

Die Linie CE muß als Sehne in den größern Kreisabschnitt getragen werden, wie leicht erhellt.

Die Aufgabe für einen stumpfen Winkel (Fig. 501.) ist nur möglich, so lange die Linie CE oder CA kleiner als BC ist. Wird sie größer oder eben so groß, so ist kein Dreieck mehr im kleinern Kreisbabschnitte BAC möglich. Daß die Linie CE als Sehne in den kleinern Kreisabschnitt angetragen werden muß, erhellt von selbst.

Anmerkung 2. Die Aufgabe für einen stumpfen Winkel erzeugt nur ein mögliches Dreieck und ist daher bestimmt.

Die Gestalt des Dreiecks, das einen spitzen Winkel haben soll, hängt von dem Durchschnitte der Linie CA mit der Peripherie des Kreises BAC ab. Ist nämlich die Linie CA kleiner oder eben so groß als BC, so ist nur ein Durchschnitt und also auch nur ein Dreieck möglich. Ist aber die Linie AC größer als BC, und kleiner als des Kreises Durchmesser, so sind zwei Durchschnittspunkte A und A', und deßwegen auch zwei Dreiecke BAC und BA'C möglich, die sich von einander dadurch unterscheiden, daß BAC ein spitzwinkliges und BA'C ein stumpfwinkliges Dreieck ist. Hieraus ist klar, daß die Aufgabe in diesem Falle unbestimmt ist, wenn nicht angegeben ist, ob ein stumpfwinkliges oder spitzwinkliges Dreieck gebildet werden soll.

§. 443.

Aufgabe. Es ist die Summe zweier Seiten, der von ihnen eingeschlossene Winkel und der Radius des umschriebenen Kreises gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden.

1) Die Summe sey BE, des Kreises Halbmesser MB, der gegebene Winkel x sey spitz. Fig. 502.

Auflösung. Man beschreibe mit dem gegebenen Halbmesser MB den Kreis ABC und bilde aus MB, als Hypotenuse, dem Winkel x, als Winkel am Mittelpunkte M, das rechtwinklige Dreieck BMD, verlängere BD bis zum Durchschnitte C mit der Peripherie des Kreises. Nun verlängere man

DM bis zum Durchschnitte F mit der Peripherie des Kreises, ziehe FB oder FC und beschreibe von dem Punkte F aus, als Mittelpunkt, mit BF, als Halbmesser, einen zweiten Kreis BGEC, trage von einem Endpunkte B der Linie BC die Summenlinie BE, als Sehne, in den so eben gezogenen Kreis, so wird die Summenlinie BE den kleinern Kreis in einem Punkte A durchschneiden, den Punkt A verbinde man mit C durch die Linie AC, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Man ziehe die Linien MC, FB, FC, EC, verlängere DF bis zum Durchschnitte G mit der Peripherie des äussern Kreises und ziehe BG und GC.

Nach der Construction sind die beiden Dreiecke BMD und MDC congruent, also die Winkel x und x' einander gleich, und der Winkel BMC $= x + x' = 2x$.

Die Linie DM steht auf der Sehne BC senkrecht auf, geht durch den Mittelpunkt M des Kreises BFC und den Mittelpunkt F des Kreises BGC, also halbirt sie die Kreise und erzeugt die gleichen Sehnen BF, FC und BG, GC. Hieraus folgt, daß die Dreiecke BFD und DFC, BGD und GDC congruent und die Winkel y und y', z und z' einander gleich sind.

Beachtet man endlich, daß BFC der Peripheriewinkel ist, welcher dem Centriwinkel BMC im Kreise BFC zugehört, und daß BGC der Peripheriewinkel ist, welcher dem Centriwinkel BFC im Kreise BGC zugehört, so ist der Winkel

$$BFC = \tfrac{1}{2}\,BMC = \tfrac{1}{2}.2x = x$$

und $$BGC = \tfrac{1}{2}\,BFC = \tfrac{1}{2}x$$

Dieß führt zu dem Schlusse, daß die Peripheriewinkel über der Sehne BC in dem Kreise BFC dem gegebenen Winkel x und die im Kreise BGC seiner Hälfte gleich sind.

Legt man nun von B die Summenlinie BE, als Sehne, in den Kreis BEC, so ist der Winkel BAC $= x$ und BEC $= \tfrac{1}{2}x$, also der Winkel

$$ACE = BAC - BEC = x - \tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{2}x$$

und folglich das Dreieck ACE gleichschenklig und AC = AE. Hieraus fließt

$$BA + AC = BA + AE = BE$$

Das Dreieck BAC genügt also den Bedingungen der Aufgabe.

2) Die Summe sey BE, des Kreises Halbmesser MB, der gegebene Winkel x sey stumpf. Fig. 503.

Auflösung. Man beschreibe mit dem gegebenen Halbmesser den Kreis BAC, bilde aus MB, als Hypotenuse, dem Winkel BMD $= 2R - x$, als Winkel am Mittelpunkte, das rechtwinklige Dreieck BDM, verlängere BD bis zum Durchschnitte C und MD bis zum Durchschnitte F der Peripherie des Kreises ABC, ziehe BF oder FC und beschreibe von F, als Mittelpunkt, mit FB, als Radius, einen Kreis BEC, trage die Summenlinie BE, als Sehne, in den Kreis BEC, verbinde den Durchschnittspunkt A mit C, so ist BAC das gesuchte Dreieck.

Es läßt sich nach dem vorigen Beweis leicht zeigen, daß die Peripheriewinkel über der Sehne BC im Kreise BAC dem Winkel x, und die Peripheriewinkel über derselben Sehne im Kreise BEC seiner Hälfte gleich sind. Es ist also der Winkel BAC $= x$, und der Winkel BEC $= \frac{1}{2}x$, das Dreieck EAC gleichschenklig und AE $=$ EC, folglich

$$BA + AC = BA + AE = BE$$

Anmerkung. Die Aufgabe ist so lange möglich, als die Summenlinie BE (Fig. 502 und 503.) den Kreis BEC durchschneidet, oder berührt; sie wird unmöglich, wenn sie ihn nicht durchschneidet oder berührt, also wenn BE größer werden sollte, als der Durchmesser des zweiten Kreises BECB.

Da die Linie BE immer kleiner seyn muß, als der Durchmesser des Kreises BEC, und größer als die dritte Seite BC, so wird sie seine Peripherie immer in zwei Punkten E und E′ durchschneiden. Dadurch entstehen zwei der Lage nach unter einander verschiedene Dreiecke BAC und BA′C (Fig. 502 und 503.), die beide den Bedingungen der Aufgabe genügen, aber nicht unter sich verschieden, sondern congruent sind, wie sich dieß leicht zeigen läßt.

§. 444.

Aufgabe. Es ist der Umfang eines Dreiecks, ein Winkel, der Halbmesser des umschriebenen Kreises gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden.

Erörterung. Aus dem Bisherigen ist klar, daß da-

durch, daß der Halbmesser eines Kreises und ein Winkel x = BAC gegeben ist Fig. 500., auch die ihm als Sehne im Kreise gegenüberstehende Linie BC gegeben ist, eben so: daß durch eine Seite BC und des Kreises Halbmesser BM, auch der ihm gegenübenstehende Winkel BAC gegeben ist. Ist daher der Umfang eines Dreiecks und einer seiner Winkel gegeben, so ist auch die ihm gegenüberstehende Seite gegeben und demnach fällt die so eben vorgelegte Aufgabe mit der des vorigen § zusammen und es ergibt sich also Folgendes

1) Der Umfang sey PQ, der Radius BM, der gegebene Winkel x sey spitz. Fig. 502.

Auflösung. Man beschreibe mit dem Halbmesser BM den Kreis BACB und bilde aus BM, als Hypotenuse, dem Winkel x, als Winkel am Mittelpunkte, das rechtwinklige Dreieck BMD, verlängere BD bis zum Durchschnitte C mit der Peripherie des Kreises und ebenso DM bis F, nun ziehe man FB und beschreibe mit BF, als Halbmesser, von F aus den Kreis BECB, lege den Ueberschuß des Umfangs PQ über die Linie BC, also BE = PQ — BC, als Sehne, in den Kreis BECB und vollende das Dreieck BAC, so ist es das gesuchte.

Beweis. Man ziehe MC und EC, so zeigt sich leicht, daß der Winkel $BMC = x + x' = 2x$. Da nun der Winkel BMC der Centriwinkel und BAC der Peripheriewinkel ist, die mit einander auf gleichem Bogen eines Kreises aufstehen, so ist der Winkel

$$BAC = \tfrac{1}{2} BMC = \tfrac{1}{2} 2 . x = x$$

Eben so zeigt sich auf die ähnliche Art, daß der Winkel

$$BEC = \tfrac{1}{2} BAC = \tfrac{1}{2} x$$

und ferner, daß der Winkel

$$ACE = BAC - BEC = x - \tfrac{1}{2} x = \tfrac{1}{2} x$$

und also das Dreieck EAC gleichschenklig ist.

Es ist daher $BA + AC + BC = BA + AE + BC = PQ - BC + BC = PQ$. Das Dreieck im Kreise BAC hat also den gegebenen Umfang und Winkel.

2) Der Umfang sey PQ, der Radius BM, der gegebene Winkel x sey stumpf. Fig. 503.

Auflösung. Man beschreibe mit dem Halbmesser BM einen Kreis BAC und bilde aus dem Halbmesser BM, als Hypotenuse, dem Winkel BMD, als Winkel am Mittelpunkte, das rechtwinklige Dreieck BDM, verlängere BD und MD bis zu den Durchschnitten C und F der Peripherie, beschreibe von F aus mit BF, als Halbmesser, den Kreis BECB und trage BE = PQ — BC, als Sehne, in denselben, vollende das Dreieck BAC, so ist BAC das gesuchte Dreieck.

Der Beweis führt sich auf ähnliche Weise, wie der Vorige.

Anmerkung. Ueber die Möglichkeit der Construction und über die Anzahl der auflösenden Dreiecke gelten die nämlichen Bemerkungen, wie sie in den Anmerkungen zu §. 443. gegeben wurden.

§. 445.

Aufgabe. Es ist eine Seite, die Summe der beiden andern und der Halbmesser des umschriebenen Kreises gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden. Fig. 504.

Auflösung. Die eine Seite sey BC, die Summe der beiden übrigen CE, der Radius MB. Man beschreibe mit dem Halbmesser MB den Kreis BACB und lege die gegebene Seite BC, als Sehne, in den Kreis, ziehe durch die Mitte D der Sehne BC und des Kreises Mittelpunkt den Durchmesser GF, beschreibe mit der Entfernung FB oder FC, als Radius, von F aus den Kreis BECB und trage von dem einen Endpunkte C die Summenlinie CE, als Sehne, in den eben erhaltenen Kreis, verbinde den Punkt A, worin diese Linie die Peripherie des Kreises BAC durchschneidet, mit B durch die Linie BC, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Nach der Construction sind die beiden Kreise BAC und BEC so gebildet, daß der Peripheriewinkel BAC über der Sehne BC im Kreise BAC doppelt so groß, als der Peripheriewinkel über der Sehne BC im Kreise BEC ist (§. 443.) Demnach ist der Winkel BEC = $\frac{1}{2}$BAC und der Winkel BEA = BAC — BEC = BAC — $\frac{1}{2}$BAC = $\frac{1}{2}$BAC

Das Dreieck BEC ist also gleichschenklig und folglich ist BA = AE.

Es ist also AC + AB = AC + AE = CE

Das Dreieck ABC hat also die gegebene Seite und die Summe der beiden übrigen.

Anmerkung. Die Aufgabe ist so lange möglich, als die Summenlinie CE den Kreis BEC durchschneidet, oder berührt. Sie wird unmöglich, wenn sie ihn weder durchschneidet, noch berührt, oder wenn CE größer, als der Durchmesser des Kreises BECB wird.

In allen Fällen, wo die Aufgabe möglich und die Summenlinie kleiner als der Durchmesser des Kreises BECB ist, sind auch immer zwei Durchschnitte E und E' und also auch zwei Dreiecke BAC und BA'C möglich, die aber unter einander congruent und also nur der Lage nach von einander verschieden sind.

Der Kreis BEC wurde von dem Scheitelpunkte F des größern Kreisabschnittes BFC aus beschrieben. Man kann aber auch von dem Scheitelpunkte G des kleinern Kreisabschnittes BGC mit der Entfernung GC, als Radius, den Kreis BCHB beschreiben. Ist nun die Summenlinie von der Beschaffenheit, daß man sie als Sehne CE'' in diesen Kreis legen kann, so entsteht dann das stumpfwinklige Dreieck BKC. Da man aber alsdann auch die Summenlinie als Sehne CE''' in den Kreis BECB tragen kann, so entsteht in diesem Falle das Dreieck BK'C. Auch dieses Dreieck ist stumpfwinklig. Beide Dreiecke unterscheiden sich aber dadurch von einander, daß in dem Dreiecke BCK der stumpfe Winkel der Seite BC gegenübersteht, im Dreiecke BK'C aber der Linie BC anliegt.

Hieraus ergibt sich, daß in diesem Falle die Aufgabe unbestimmt ist, wenn nicht angegeben ist, ob der stumpfe Winkel der Seite BC anliegen, oder ihr gegenüber stehen soll.

§. 446.

Aufgabe. Es ist der Unterschied zweier Seiten, der an der kleinern von ihnen anliegende Winkel und der Radius des Kreises gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden. Fig. 505 und 506.

Erörterung. Da durch den Winkel eines in den Kreis einzuschreibenden Dreiecks die gegenüberstehende Seite gegeben ist und der an der kleinern Seite anliegende Winkel der größern

Seite gegenübersteht, so ist auch die größere Seite gegeben. Der Winkel, welcher der größern Seite gegenübersteht, kann entweder spitz oder stumpf seyn. Hieraus ergeben sich folgende zwei Fälle:

1) Der Unterschied sey AE, der Halbmesser MA, der Unterschied AE. Fig. 505.

Auflösung. Man beschreibe mit dem Halbmesser MA den Kreis ABC, bilde aus dem Radius MA, als Hypotenuse, und dem Winkel $x = AMD$, als Winkel am Mittelpunkt M, das rechtwinklige Dreieck AMD und verlängere AD bis zum Durchschnitte C mit der Peripherie des Kreises. Nun schneide man von der Linie AC den gegebenen Unterschied AE ab, trage $EC = BC$ als Sehne in den Kreis und ziehe AB, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Man ziehe MC, so sind die beiden Dreiecke AMD und MDC congruent und also $x = x'$ und folglich der Winkel $AMC = x + x' = 2x$. Der dem Centriwinkel AMC zugehörige Peripheriewinkel ABC ist seiner Hälfte gleich, also ist der Winkel $ABC = x$. Die Linie BC ist um AE kleiner als AC, also BE der Unterschied von AC und BC, und der gegebene Winkel liegt der kleinern Seite an.

2) Der Unterschied sey BE, der Radius MB, der Winkel x sey stumpf. Fig. 506.

Auflösung. Man beschreibe mit dem gegebenen Halbmesser den Kreis BAC und bilde aus dem Radius BM, als Hypotenuse, dem Winkel $BMD = 2R - x$, als Winkel am Mittelpunkt, das rechtwinklige Dreieck BMD, verlängere BD bis zum Durchschnitte C der Peripherie, schneide auf BC den Unterschied BE ab und trage $EC = AC$, als Sehne, in den Halbkreis, ziehe AB, so ist ABC das gesuchte Dreieck, denn es ist der Peripheriewinkel $BAC = x$, die Seite AC um BE kleiner, als die größere und der Winkel x liegt an der kleinern Seite.

Anmerkung. Ist der Unterschied zweier Seiten, der an der größern Seite liegende Winkel und der Halbmesser des umschriebenen Kreises gege-

ben, und man soll daraus ein Dreieck bilden, so ist zu bemerken, daß der gegebene Winkel der kleinern Seite gegenübersteht, und daß also in dem vorliegenden Falle durch den gegebenen Winkel die kleinere Seite gegeben ist.

Nennt man den Halbmesser MB, den Winkel x, den Unterschied BE, so ergibt sich folgende

Auflösung. Fig. 507. Man beschreibe mit MB den Kreis ABC. Bilde aus dem Halbmesser MB, als Hypotenuse, dem Winkel x = BMD, als Winkel am Mittelpunkte, das rechtwinklige Dreieck BMD, verlängere BD bis zum Durchschnitte der Peripherie in C und trage an CB den Unterschied BE an. Nun trage man die Linie CE = CA, als Sehne, in den Kreis und ziehe AB, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Denn es ist der Winkel BAC = BMD = x als Peripheriewinkel über der Sehne BC, ferner ist AC um BE größer als BC und der Winkel x liegt an der größern Seite BC.

Zusatz. Die Aufgabe ist so lange möglich, als die Linie CE den Kreis ABC berührt oder durchschneidet; sie wird unmöglich, wenn sie ihn weder berührt noch durchschneidet. Die Linie CE kann also nie größer als der Durchmesser des Kreises werden. Sie selbst aber muß immer größer als EC seyn. Ist die Linie EC so groß als der Durchmesser des Kreises, so ist nur ein Dreieck möglich und die Aufgabe ist bestimmt. Ist sie kleiner als derselbe, so sind immer zwei Durchschnitte A und A′ in der Peripherie des Kreises möglich und dann wird die Aufgabe unbestimmt; denn die beiden Dreiecke BAC und BA′C die sofort entstehen, unterscheiden sich dadurch von einander, daß das Dreieck ABC im kleinern Kreisabschnitte bei B einen stumpfen Winkel, das Dreieck BA′C im größern Kreisabschnitte bei B einen spitzen Winkel haben muß.

Der gegebene Winkel muß immer spitz seyn. Sollte ein stumpfer Winkel gegeben seyn, so würde eine Unmöglichkeit gefordert.

§. 447.

Aufgabe. Es ist der Unterschied zweier Seiten, der

von ihnen eingeschlossene Winkel und der Halbmesser des umschriebenen Kreises gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden.

Erörterung. Da der von beiden Linien eingeschlossene Winkel der dritten Seite gegenübersteht, so ist also auch die dritte Seite gegeben.

1) Die Unterschiedslinie sey BE, des Kreises Halbmesser BM, der Winkel x sey spitz.

Auflösung. Fig. 508. Man beschreibe mit BM den Kreis ABC und bilde aus BM, als Hypotenuse, und dem Winkel x, als Winkel an dem Mittelpunkte M, das Dreieck BMD, verlängere BD bis zum Durchschnitte C der Peripherie des Kreises. Nun beschreibe man über BC einen Bogen BEC, der einen Winkel $R + \frac{1}{2}x$ faßt und trage von dem einen Endpunkte B die Unterschiedslinie BE, als Sehne, in diesen Bogen, verlängere sie bis zum Durchschnitte A des Kreises BAC und ziehe AC, so ist BAC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Der Winkel BMD = BAC = x als Peripheriewinkel über der Sehne BC. Zieht man nun EC, so ist der Winkel BEC = $R + \frac{1}{2}x$, nach der Construction, und folglich sein Nebenwinkel AEC = $2R - (R + \frac{1}{2}x) = R - \frac{1}{2}x$. Aus zwei Winkeln eines Dreiecks bestimmt sich der dritte und es ist der Winkel

$$ACE = 2R - x - (R - \tfrac{1}{2}x) = R - \tfrac{1}{2}x$$

folglich ist der Winkel AEC = ACE und das Dreieck AEC gleichschenklig und die Linie AE = AC. Es ist also auch die Seite BA um BE größer als AC. Beide Seiten schließen den gegebenen Winkel x ein, also erfüllt das Dreieck ABC die Bedingungen der Aufgabe.

2) Die Unterschiedslinie sey BE, der Halbmesser MB, der Winkel x sey stumpf. Fig. 509.

Auflösung. Man beschreibe mit MB den Kreis BAC, bilde aus BM, als Hypotenuse, und dem Winkel BMD = $2R - x$, als Winkel am Mittelpunkte, das rechtwinklige Dreieck BDM, verlängere BD bis zum Durchschnitte C mit der Peripherie. Nun beschreibe man über der Linie BC einen

Bogen BEC, der einen Winkel $R + \frac{1}{2}x$ faßt, und trage von dem einen Endpunkte B die Unterschiedslinie BE, als Sehne, in den Bogen, verlängere BE bis zum Durchschnitte A des Kreises BAC und ziehe AC, so ist BAC das gesuchte Dreieck, denn es läßt sich leicht zeigen, daß der Winkel BAC $= x$, der Winkel AEC $= R - \frac{1}{2}x$, also auch der dritte Winkel BCA $= R - \frac{1}{2}x$ und daß folglich AEC ein gleichschenkliges Dreieck und EA = AC ist. Hieraus folgt, daß die Seite BA um BE größer als AC ist und daß beide Seiten den stumpfen Winkel einschließen.

§. 448.

Aufgabe. Es ist die größte Seite, der Unterschied der beiden übrigen und der Halbmesser des umschriebenen Kreises gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden.

Erörterung. Es läßt sich leicht erkennen, daß der Winkel, welcher der größten Seite gegenübersteht, entweder spitz oder stumpf seyn kann. Hieraus ergeben sich folgende zwei Fälle

1) Der Unterschied sey BE, die Seite BC und der ihr gegenüberstehende Winkel sey spitz. Fig. 510.

Auflösung. Man beschreibe mit MB den Kreis BAC und bilde aus BM, als Hypotenuse, und BD $= \frac{1}{2}$BC, als Kathete, das rechtwinklige Dreieck BMD, verlängere BD bis zum Durchschnitte C mit der Peripherie des Kreises. Nun beschreibe man über der Linie BC einen Bogen BEC, welcher einen Winkel $R + \frac{1}{2}$BMD faßt, trage den Unterschied BE, als Sehne, in den Bogen BEC, verlängere BE bis zum Durchschnitte A der Peripherie des Kreises BAC und ziehe AC, so ist BAC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Nach der Construction ist der Winkel BAC = BMD; ferner ist der Winkel BEC $= R + \frac{1}{2}$BMD, also der Nebenwinkel AEC $= 2R - (R + \frac{1}{2}\text{BMD}) = R - \frac{1}{2}$BMD. Aus diesem und dem Winkel bei A bestimmt sich der dritte Winkel und es ist

$$ECA = 2R - (R - \tfrac{1}{2}\text{BMD}) - \text{BMD} = R - \tfrac{1}{2}\text{BMD}$$

Hieraus folgt, daß die Winkel bei E und C und also auch die Seiten EA und AC einander gleich sind.

Es ist also BE = BA — EA = BA — AC

Das Dreieck hat also die gegebene Seite BC und die beiden übrigen sind um den Unterschied BE von einander verschieden.

2) Der Unterschied sey BE, die Seite BC und der gegenüberstehende Winkel x sey stumpf. Fig. 509.

Auflösung. Man beschreibe mit MB den Kreis BAC und bilde aus MB, als Hypotenuse, und BD = $\frac{1}{2}$BC das rechtwinklige Dreieck BDM, verlängere BD bis zum Durchschnitte C der Peripherie. Nun beschreibe man über BC auf der Seite, welche dem Punkt M entgegensteht, den Bogen BEC, welcher die Summe eines Rechten und die Hälfte des Nebenwinkels von BMD, also den Winkel R + $\frac{1}{2}$BMF faßt, trage BE, als Sehne, in den Kreisbogen, verlängere BE bis A und ziehe AC, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Da der erhabene Centriwinkel BMC mit dem Peripheriewinkel BAC auf einerlei Sehne BC eines Kreises aufsteht, so ist letzterer die Hälfte von ersterem, und es ist der Winkel BAC = $\frac{1}{2}$BMC = BMF

Zieht man EC, so ist der Winkel BEC = R + $\frac{1}{2}$BMF und folglich sein Nebenwinkel AEC = 2R — (R + $\frac{1}{2}$BMF) = R — $\frac{1}{2}$BMF. Aus beiden bestimmt sich der dritte und es ist der Winkel

ACE = 2R — BMF — (R — $\frac{1}{2}$BMF) = R — $\frac{1}{2}$BMF

Die Winkel bei E und C sind also einander gleich, folglich das Dreieck AEC gleichschenklig und AE = EC, also auch

BE = BA — AE = BA — AC

Der Winkel BAC ist Peripheriewinkel im kleinern Kreisabschnitte, folglich ist er stumpf. Das Dreieck erfüllt also die Bedingungen der Aufgabe.

Anmerkung. Ist der Unterschied, eine der kleinern Seiten und der Halbmesser des umschriebenen Kreises gegeben, und man soll daraus ein Dreieck bilden, so ist zu beachten, daß der dieser Seite gegenüberstehende Winkel immer ein spitzer seyn muß. Die Construction dieser Aufgabe fällt also mit der unter der ersten Auflösung gegebenen zusammen.

§. 449.

§. 449.

Aufgabe. Es ist ein Winkel, die Höhe, welche durch seine Spitze geht, und der Halbmesser des umschriebenen Kreises gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden. Fig. 511.

Auflösung. Der Winkel sey x, der Halbmesser MB, die Höhe AC. Man beschreibe mit MB den Kreis BAC, bilde aus MB, als Hypotenuse, und dem Winkel BMD = x, als Winkel an des Kreises Mittelpunkt, das rechtwinklige Dreieck BMD, verlängere BD bis zum Durchschnitte C mit der Peripherie des Kreises. Nun errichte man auf irgend einem Punkte E der Linie BC, oder ihrer Verlängerung, die Höhe EF senkrecht und ziehe FA mit BC parallel bis zum Durchschnitte A mit der Peripherie des Kreises, ziehe AC und AB, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Der Winkel BMD ist nach der Construction dem gegebenen Winkel x gleich. Der Peripheriewinkel BAC ist der Hälfte des Centriwinkel gleich, der mit ihm auf gleichem Bogen steht, also BAC = BMD = x. Fällt man von der Spitze A die Linie AE, so ist sie der Linie FE und diese der gegebenen Höhe gleich.

Das Dreieck ABC hat also den gegebenen Winkel x und die Höhe AD, die durch seine Spitze geht.

§. 450.

Aufgabe. Es sind zwei Winkel und der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden.

Die Auflösung dieser Aufgabe fällt mit der §. 431. gegebenen zusammen und ist dort schon gegeben.

§. 451.

Aufgabe. Es ist eine Seite, ein anliegender Winkel und der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden. Fig. 512.

Auflösung. Der Winkel sey x, der Halbmesser MD, die Seite BC. Man halbire den gegebenen Winkel x = ABC durch die Linie BM, bilde aus dem Radius, als Kathete, und der Hälfte des gegebenen Winkels MBD = $\frac{1}{2}$x, als gegenüberstehendem Winkel, das rechtwinklige Dreieck MBD, beschreibe den Kreis DEF mit dem Halbmesser MD, trage auf BD die gegebene Seite BC. Mache BE = BD, CF = CD und ziehe durch die Punkte C und F, B und E die Linien CA und BA bis zu ihrem Durchschnitte A, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Die drei Seiten bilden, wie leicht aus der Construction erhellt, Tangenten des Kreises EDF, also ist der Kreis in das Dreieck beschrieben, die Dreiecke EBM und MBD sind congruent, also der Winkel EBM = MBD = $\frac{1}{2}$x und folglich ABD = 2 . $\frac{1}{2}$x = x. Das Dreieck ABC hat also die gegebene Seite und den gegebenen Winkel.

§. 452.

Aufgabe. Es ist eine Seite, der gegenüberstehende Winkel und der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden. Fig. 513.

Auflösung. Die Seite sey BC, der Halbmesser MD, der Winkel x. Man beschreibe über der Seite BC einen Bogen BMC, der einen Winkel R + $\frac{1}{2}$x faßt, und nun bilde man aus diesem Winkel, als Scheitelwinkel, und dem Halbmesser MD, als Höhe, nach §. 278. das Dreieck BMC, beschreibe mit MD um M den Kreis DEF, mache BE = BD

und CF = DC, verlängere beide Linien bis zu ihrem Durchschnittspunkte A, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Man ziehe die Radien ME und MF. Da BD = BE und DC = CF ist, so bilden die Seiten des Dreiecks BAC Tangenten und folglich sind die Dreiecke BEM und BMD, DMC und MFC congruent, also auch der Winkel $z = z'$ und $u = u'$, und daher, da $BMC = R + \frac{1}{2}x$ ist, der erhabene Winkel

$$EMF = 2(R + \tfrac{1}{2}x) = 2R + x$$

und folglich der dritte Winkel am Mittelpunkte M

$$EMF = 4R - (2R + x) = 2R - x$$

In dem Vierecke EAFM ergänzen sich die beiden Winkel bei A und M zu zwei Rechten, also ist der Winkel

$$EAF = 2R - EMF = 2R - (2R - x) = x$$

Das Dreieck ABC hat also die gegebene Seite und den ihm gegenüberstehenden Winkel.

§. 453.

Aufgabe. Es ist ein Winkel, der Umfang eines Dreiecks und der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden. Fig. 514.

Auflösung. Der Winkel sey x, der Halbmesser MD, die Umfangslinie BQ. Man trage auf die Schenkel des Nebenwinkels zu dem gegebenen $EMD = 2R - x$ den Radius $MD = ME$. Beschreibe mit MD den Kreis DEFD und errichte auf beiden Endpunkten E und D des Halbmessers ME und MD die senkrechten Linien EB und DB bis zu ihrem Durchschnitte B, trage von B aus auf beiden Schenkeln des Winkels EBD die halbe Umfangs-Linie $BK = BP = \frac{1}{2}PQ$ auf und errichte auf den Endpunkten K und P senkrechte Linien bis zum Durchschnitte H, ziehe mit HK einen Kreis KGPK und lege an ihn und den Kreis DEFD die gemeinschaftliche Tangente AC, §. 416, 2., so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Vermöge der Construction sind die beiden Linien BK und BP Tangenten der Kreise EDFD und KGPK. Da in dem Vierecke BEMD bei E und D rechte Winkel sind, so ist der Winkel EBD der Ergänzungswinkel zu zwei Rechten für den Winkel EMD, also ist der Winkel

$$EBD = 2R - (2R - x) = x$$

Das Dreieck ABC hat also den gegebenen Winkel.

Da die Linie AC eine gemeinschaftliche Tangente zu beiden Kreisen ist, so ist AK = AG und CG = CP und folglich

$$BA + AG + GC + BC = AB + AK + CP + BC$$

oder $BA + AC + BC = BK + BP = 2 \cdot \frac{1}{2}PQ = PQ$ also auch der Umfang des Dreiecks der gegebenen Linie gleich.

Das Dreieck ABC entspricht also den Bedingungen der Aufgabe.

C
Aufgaben über Berührungen.

---

§. 454.

Aufgabe. Es sind zwei convergirende Linien und der Halbmesser eines Kreises gegeben. Man soll mit dem gegebenen Halbmesser einen Kreis beschreiben, der die beiden Linien berührt. Fig. 515.

Auflösung. Die Linien seyen AB und CD, des Kreises Halbmesser MD. Man errichte zwischen beiden Linien den gegebenen Halbmesser MD = PQ = HK senkrecht und ziehe durch die Endpunkte K und Q die Linie ab und cd parallel mit AB und CD, so ist der Durchschnittspunkt M des gesuchten Kreises Mittelpunkt. Beschreibt man mit dem Halbmesser MD von M aus den Kreis DEFD, so ist er der gesuchte.

Der **Beweis** führt sich dadurch leicht, daß sich die durch die Endpunkte K und Q der senkrechten Radien gezogenen Linien ab und cd des zu findenden Kreises Mittelpunkt treffen müssen, da sie parallel mit AB und CD gehen. Ihr Durchschnittspunkt ist also der gesuchte Mittelpunkt. Fällt man nun von M auf AB und CD die senkrechten Linien ME und MD und beschreibt mit MD den Kreis DEF, so berührt er die beiden Linien.

§. 455.

Aufgabe. Es ist der Halbmesser eines Kreises, eine Linie und ausser ihr ein Punkt gegeben. Man soll mit dem gegebenen Halbmesser einen Kreis beschreiben, der die gegebene Linie berührt und durch den gegebenen Punkt geht. Fig. 516.

Auflösung. Die Linie sey AB, der Punkt E, des Kreises Halbmesser MD. Man errichte in irgend einem Punkte F der Linie AB des Kreises Halbmesser MD = FG

senkrecht und ziehe durch seinen Endpunkt G die Linie ab parallel mit AB, beschreibe von E aus mit dem Halbmesser MD = EM einen Bogen, der die gezogene Parallele ab in dem Punkte M durchschneiden wird, so ist M des gesuchten Kreises Mittelpunkt. Nun läßt sich von M aus mit dem Halbmesser MD der Kreis DPE leicht beschreiben, welcher der gesuchte ist.

Beweis. Man fälle von M auf AD die Linie MD senkrecht, so ist MD dem gegebenen Halbmesser gleich. Wird also mit MD, als Halbmesser, ein Kreis PDE beschrieben, so berührt er die gegebene Linie. Zieht man endlich ME, so ist ME = MD, folglich geht der Kreis PDE durch den gegebenen Punkt und erfüllt die Bedingungen der Aufgabe.

Anmerkung. Die Aufgabe ist so lange möglich, als der senkrechte Abstand des Punktes E von der Linie AB kleiner oder eben so groß, als der doppelte Halbmesser MD ist. Ist er größer, so ist die Aufgabe unmöglich.

Der Mittelpunkt M des gesuchten Kreises wird durch den Durchschnitt des, mit dem Halbmesser MD von E aus gezogenen, Bogens bestimmt. Da nun zwei Durchschnitte M und M′ möglich sind, so ist klar, daß auch zwei Kreise DPE und D′EP′ möglich sind, welche den Bedingungen der Aufgabe genügen.

§. 456.

Aufgabe. Es ist ein Kreis, eine Linie und der Halbmesser eines Kreises gegeben. Man soll mit letzterem einen Kreis beschreiben, der den gegebenen Kreis und die gegebene Linie berührt. Fig. 517.

Erörterung. Die gegebene Linie kann entweder ausserhalb des gegebenen Kreises gezogen seyn, so daß sie ihn also weder berührt noch durchschneidet, oder sie kann so gezogen seyn, daß sie ihn entweder berührt oder durchschneidet. Hieraus ergeben sich folgende zwei Fälle:

1) Der gegebene Kreis sey DHE, der Halbmesser des zu bildenden MD, die Linie ausserhalb des Kreises AB.

Auflösung. Man errichte auf irgend einem Punkte R der Linie AB den gegebenen Halbmesser MD = RS senkrecht,

gegen den Kreis KED gerichtet, und ziehe durch seinen Endpunkt S die Linie ab parallel mit AB, dann beschreibe man von des gegebenen Kreises KED Mittelpunkte M' mit der Summe beider Radien M'M = M'D + MD einen Bogen, der die Parallele ab in dem Punkte M durchschneidet, so ist M des gesuchten Kreises Mittelpunkt. Von M aus läßt sich mit MD leicht der Kreis GDF beschreiben.

Beweis. Es ist klar, daß des gesuchten Kreises Mittelpunkt in der Parallele ab liegen muß, und daß jeder Kreis, dessen Mittelpunkt in der Linie ab liegt und dessen Halbmesser MD ist, die Linie AB berühren muß; denn der senkrechte Abstand beider Linien von einander ist dem gegebenen Halbmesser gleich. Da der gesuchte Kreis ausserhalb des gegebenen liegen, die beiden Kreise sich aber auch berühren sollen, so ist der Abstand ihrer Mittelpunkte oder ihre Centrale der Summe beider Radien gleich. Der Punkt M entspricht diesen Bedingungen und ist also der Mittelpunkt des gesuchten Kreises.

Anmerkung. Es ist klar, daß es zwei auflösende Kreise GDF und G'D'F' gibt, denn es sind zwei Durchschnitte zwischen der Linie ab und der Centrale MM' möglich.

Die Aufgabe ist so lange möglich, als der senkrechte Abstand der Linie AB von dem Mittelpunkte M' des gegebenen Kreises kleiner oder eben so groß ist als die Summe des Durchmessers des zu bildenden und des Halbmessers des gegebenen Kreises. Sie ist unmöglich, wenn diese Summe kleiner ist, als jener Abstand.

2) Der Kreis sey HVE, der Halbmesser des zu bildenden MD, die Linie AB durchschneide den Kreis. Fig. 518.

Auch hier lassen sich zwei Fälle unterscheiden:

a) der zu bildende Kreis berühre den gegebenen von aussen.

Auflösung. Man errichte auf irgend einem Punkte R den gegebenen Halbmesser MD = Ra und ziehe durch seinen Endpunkt a eine Parallele ab mit AB. Nun beschreibe man mit der Summe der beiden Halbmesser MP = ME + MD einen Bogen, welcher die Parallele ab in P durchscheidet, so ist P des gesuchten Kreises Mittelpunkt, und es läßt sich mit dem gegebenen Halbmesser MD = PE der Kreis TNE beschreiben, welcher die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, wie sich leicht zeigen läßt.

Anmerkung. Es sind zwei auflösende Kreise auf beiden Seiten des gegebenen Kreises möglich, TNE und FUT', der Durchschnitt Q der Centrale M'Q = M'P gibt das Centrum des zweiten Kreises. Auf der andern Seite von AB sind gleichfalls zwei auflösende Kreise möglich.

b) Der zu bildende Kreis berühre den gegebenen von innen.

Auflösung. Man ziehe die Parallele ab und beschreibe mit dem Unterschied der beiden Radien einen Bogen, der die Parallele in dem Punkte M durchschneiden wird, so ist M der Mittelpunkt des gesuchten Kreises und EGD der gesuchte Kreis.

Der Beweis führt sich leicht.

Anmerkung. Auch hier sind zwei auflösende Kreise möglich DEG und MFD', denn es sind zwei Durchschnitte M und M'' mit der Parallele ab und dem Unterschied der beiden Radien möglich. Es ist nur ein auflösender Kreis möglich, wenn die Linie AB den gegebenen Kreis berührt.

Die Aufgabe wird unmöglich, wenn der Durchmesser des zu beschreibenden Kreises größer ist, als der senkrechte Abstand des Scheitelpunktes des gegebenen Kreises von der Linie AB. Sind beide gleich, so ist gleichfalls nur ein auflösender Kreis möglich.

§. 457.

Aufgabe. Es ist ein Kreis und ausser ihm ein Punkt und ein Halbmesser gegeben. Man soll mit diesem einen Kreis beschreiben, der den gegebenen Kreis berührt und durch den Punkt geht. Fig. 519.

Auflösung. Der gegebene Kreis sey KDG, der Punkt E, der Halbmesser des Kreises DM. Man beschreibe von E aus mit dem gegebenen Halbmesser EM = DM und von des gegebenen Kreises Mittelpunkte P mit der Summe beider Halbmesser PM = PD + DM zwei Kreisbogen, die sich in M durchschneiden, so ist M des gesuchten Kreises Mittelpunkt und DEFD der gesuchte Kreis.

Der Beweis führt sich leicht, wenn man berücksichtigt daß PM die Centrale der beiden Kreise ist, und daß sich beide also in D berühren, und EM = DM ist.

Anmerkung. Die beiden Kreise berühren sich ausschließend, so lange der gegebene Halbmesser DM des zu bildenden Kreises

kleiner ist, als der Halbmesser PD des gegebenen Kreises. Es sind zwei auflösende Kreise möglich, wovon der zweite HBE seinen Mittelpunkt in M' hat und auf der entgegengesetzten Seite von PE liegt.

Die Aufgabe wird unmöglich, wenn der Halbmesser des zu bildenden Kreises kleiner wird, als die Hälfte der Linie QE, oder kleiner, als die Hälfte der Entfernung des Punktes E von dem Kreise KGD, oder wenn aus EM und PM kein Dreieck über der Linie PE gebildet werden kann.

Wird der Halbmesser des zu bildenden Kreises größer, als der Halbmesser des gegebenen, so sind Fig. 520. vier auflösende Kreise möglich. Zwei Kreise, die den gegebenen ausschließend berühren, wovon nur der eine, T'EK', angegeben ist und seinen Mittelpunkt in M' liegen hat. Der dritte THT'F, der den gegebenen in dem Punkte T einschließend berührt, geht durch den Punkt E und hat seinen Mittelpunkt in M liegen.

Sein Mittelpunkt wird gefunden, wenn man den Mittelpunkt des gegebenen Kreises mit dem Punkte E verbindet, über dieser Linie das Dreieck PME mit dem gegebenen Halbmesser EM und dem Unterschied beider PM = EM — PT construirt.

Der vierte Kreis T''K''ET'' wird gefunden, wenn mit den nämlichen Linien auf der entgegengesetzten Seite von PE das Dreieck PM''E bildet.

§. 458.

Aufgabe. Es ist ein Kreis und in ihm ein Punkt und der Halbmesser eines Kreises gegeben. Man soll mit diesem Halbmesser einen Kreis in den gegebenen einschreiben, der den gegebenen berührt und durch den Punkt geht. Fig. 521.

Auflösung. Der gegebene Kreis sey TKT', der Punkt E, der Halbmesser EM. Man verbinde den gegebenen Punkt E mit dem Mittelpunkte P des gegebenen Kreises durch die Linie EP und beschreibe über ihr von E aus mit dem Halbmesser EM und von P aus, mit dem Unterschied PM beider Halbmesser, das Dreieck EMP, so ist der Durchschnittspunkt M der beiden Linien der Mittelpunkt des gesuchten Kreises. Mit dem Halbmesser ME läßt sich nun von M aus der Kreis TEF beschreiben, welches der gesuchte ist.

Beweis. Man verlängere PM bis T, so ist MP die Centrale der beiden Kreise TKT'' und TEF und folglich berühren sich die beiden Kreise in dem Punkte T. Ferner ist TM = PT — MP, also nach der Construction dem gegebenen Halbmesser ME gleich; demnach geht der Kreis TEF durch den gegebenen Punkt und erfüllt die Bedingungen der Aufgabe.

Anmerkung. Da sich über der Linie EP mit dem Halbmesser EM' = EM und dem Unterschied PM' = PM beider Halbmesser zwei Dreiecke EMP und EM'P bilden lassen, so gibt es also auch zwei auflösende Kreise TEF und T'EF.

Die Aufgabe ist so lange möglich, als der Halbmesser des zu bildenden Kreises kleiner ist, als der Halbmesser des gegebenen, und ferner so lange, als die Summe aus der Entfernung des Mittelpunktes P von dem Punkte E und aus dem Unterschiede der beiden Halbmesser größer ist, als der gegebene Halbmesser, oder so lange, als sich aus den Linien EM, MP und PE ein Dreieck bilden läßt.

§. 459.

Aufgabe. Es sind zwei Kreise und ein Halbmesser gegeben. Man soll mit dem Halbmesser einen dritten Kreis beschreiben, der die beiden Kreise von aussen berührt. Fig. 522.

Auflösung. Die Kreise seyen DKG und HEN, der Halbmesser des gesuchten Kreises DM. Man verbinde die beiden Mittelpunkte P und Q der gegebenen Kreise durch die Linie PQ und beschreibe von denselben aus mit der Summe des gegebenen und des, dem Kreise zugehörigen, Halbmessers, also mit PM = PD + DM und QM = QE + DM zwei sich durchschneidende Kreisbogen; so ist M der Mittelpunkt des gesuchten Kreises. Mit DM läßt sich daher der Kreis DEF bilden.

Der Beweis führt sich leicht.

Anmerkung. Da sich über der Linie PQ mit den genannten Summen zwei Dreiecke bilden lassen, so sind auch zwei auflösende Kreise möglich. Die Aufgabe ist so lange möglich, als der gegebene Halbmesser eben so groß, oder größer ist, als die Hälfte des Unterschieds zwischen der Centrale PQ der gegebenen Kreise und

zwischen der Summe ihrer Halbmesser. Sie wird unmöglich, wenn sie kleiner ist. Berühren, oder durchschneiden sich die gegebenen Kreise, so ist die Aufgabe immer möglich.

§. 460.

Aufgabe. Es sind zwei Kreise und ein Halbmesser gegeben. Man soll mit demselben einen dritten Kreis beschreiben, der beide Kreise einschließend berührt. Fig. 523.

Auflösung. Die beiden Kreise seyen TKH und DFG, der gegebene Halbmesser MD. Man beschreibe von dem Mittelpunkte Q des einen Kreises mit dem Unterschied zwischen seinem Halbmesser und zwischen dem gegebenen QM = MD — QD, und von dem Mittelpunkte P des andern Kreises mit dem Unterschiede zwischen seinem Halbmesser und dem gegebenen PM = TM — PT zwei sich durchschneidende Kreisbogen, so ist ihr Durchschnitt M der Mittelpunkt des gesuchten Kreises. Zieht man nun von M durch Q und P die Linien MT und MD, so sind sie beide einander gleich und der Kreis, welcher mit MD gezogen wird, muß beide ausschließend berühren.

Anmerkung. Da sich auf den beiden Seiten der Linie PQ mit den Unterschieden der Radien durchschneidende Bogen beschreiben lassen, so ist klar, daß sich auch zwei auflösende Kreise bilden lassen DFS und KEG.

Die Aufgabe ist so lange möglich, als die Summe der Unterschiede der Halbmesser QM und PM größer, als die Centrale der beiden Kreise PQ; sie ist unmöglich, wenn sie kleiner ist.

§. 461.

Aufgabe. Es sind zwei Kreise und ein Halbmesser gegeben. Man soll mit diesem einen Kreis beschreiben, der beide Kreise berührt, den einen ausschließend, den andern einschließend. Fig. 524.

Auflösung. Die Kreise seyen FLH und KDE, der ge-

gebene Halbmesser MD, der zu bildende Kreis soll den zweiten Kreis Q einschließend, den ersten P ausschließend berühren. Man beschreibe über der Centrale PQ beider Kreise von dem Mittelpunkte P aus und mit der Summe, PM = PH + HM, seines und des gegebenen Halbmessers, und von Q aus mit dem Unterschiede zwischen dem gegebenen und zwischen des Kreises Halbmesser QM = DM — DQ zwei sich durchschneidende Bogen, so ist ihr Durchschnittspunkt M der Mittelpunkt des gesuchten Kreises. Zieht man nun von M nach P die Linie MP und von M durch Q die Linie MD, so sind die Linien MH und MD einander und dem gegebenen Halbmesser gleich, und der mit MD beschriebene Kreis DHR berührt den Kreis P ausschließend und Q einschließend.

Anmerkung. Da auf beiden Seiten der Centrale PQ ein Durchschnittspunkt M und M' mit den beiden Linien möglich ist, so sind auch zwei auflösende Kreise möglich. Der zweite ist ETV.

Die Aufgabe ist so lange möglich, als die Radien-Summe und der Radien-Unterschied größer, oder eben so groß, als die Centrale ist. Sie wird unmöglich, wenn sie kleiner ist.

§. 462.

Aufgabe. Es sind zwei convergirende Linien und in einer von beiden ein Punkt gegeben. Man soll einen Kreis beschreiben, der beide Linien berührt, die eine aber in dem gegebenen Punkte. Fig. 525.

Auflösung. Die Linien seyen AB und AC, der in AB gegebene Punkt sey D. Man halbire den Winkel CAB, welchen beide Linien mit einander machen, durch die Linie AF, und errichte in D die Linie DM senkrecht bis zum Durchschnitte M mit der Halbirungslinie, so ist M des gesuchten Kreises Mittelpunkt. Beschreibt man nun mit MD, als Halbmesser, den Kreis DKED, so berührt er auch die zweite Linie AC.

Beweis. Aus der Construction erhellt, daß der Kreis DKED die Linie AB in dem Punkte D berührt. Fällt man von M die Linie ME senkrecht auf AC, so entsteht das Dreieck

AEM, welches wegen der Linie AM, des Winkels MAE und MEA mit dem Dreieck AMD congruent ist; also ist ME = MD ein Halbmesser und steht auf AC senkrecht auf. Der Kreis DKED berührt also in E die Linie AC.

Anmerkung. Convergiren die gegebenen Linien nur wenig, so lege man zwischen sie nach §. 55. eine Linie, welche ihren Scheitelwinkel halbirt und verfahre wie oben.

§. 463.

Aufgabe. Es ist eine Linie und in ihr ein Punkt, ein zweiter Punkt ausser ihr gegeben. Man soll einen Kreis beschreiben, der die Linie in dem gegebenen Punkte berührt und durch den ausser ihr liegenden Punkt geht. Fig. 526.

Auflösung. Die Linie sey AB, der Punkt in ihr D, der Punkt ausser ihr E. Man errichte in dem gegebenen Punkte D eine unbestimmte senkrechte Linie, verbinde die beiden Punkte D und E mit einander und errichte in ihrem Mittelpunkte F eine senkrechte Linie FM bis zu Durchschnitte mit der in D errichteten senkrechten Linie. Nun beschreibe man mit MD, als Halbmesser, den Kreis DKE, so ist es der gesuchte.

Beweis. Da MD auf AB senkrecht steht, so berührt der mit MD gezogene Kreis die Linie AB. Zieht man die Linie ME, so entstehen die congruenten Dreiecke MDF und MFE und es ist also MD = ME und der Kreis DKE geht auch durch den Punkt E.

§. 464.

Aufgabe. Es ist ein Kreis und in seiner Peripherie ein Punkt, und ausserhalb des Kreises ein zweiter Punkt gegeben. Man soll einen zweiten Kreis beschreiben, der den gegebenen in dem bestimmten Punkte berührt und durch den zweiten Punkt geht. Fig. 527.

Auflösung. Der Kreis sey EKR und der Punkt in

seiner Peripherie E, der Punkt ausserhalb des Kreises D. Man ziehe durch den Punkt E und den Mittelpunkt des Kreises M eine unbestimmte Linie MP in der Richtung gegen den Punkt D, verbinde E und D durch eine gerade Linie und errichte in ihrem Mittelpunkte F eine senkrechte Linie FP bis zum Durchschnitte P der Linie MP, so ist P des gesuchten Kreises Mittelpunkt und PE sein Radius. Mit diesem läßt sich nun leicht der Kreis EHD beschreiben, welcher der gesuchte ist.

Beweis. Da die Punkte M, E und P in einer geraden Linie liegen, so ist E der Berührungspunkt der beiden Kreise. Zieht man die Linie PD, so entstehen die Dreiecke EPF und PFD, welche einander congruent sind; also ist EP = PD und folglich geht der gesuchte Kreis durch den Punkt D.

Anmerkung. Die beiden Kreise müssen sich immer von aussen berühren, wenn die Punkte E und D auf einerlei Seite des Kreises liegen. Liegen sie aber auf entgegengesetzten Seiten von dem Mittelpunkte des gegebenen Kreises, so muß der gesuchte Kreis den gegebenen einschließend berühren. Dieß ist der Fall bei dem Kreise E′HD, wo der Berührungspunkt E′ auf der entgegengesetzten Seite von M liegt. Die Auflösung ist die nämliche, wie vorhin.

Ist ein Kreis und in seiner Peripherie ein Punkt und ein zweiter Punkt innerhalb desselben gegeben, und man soll einen zweiten Kreis beschreiben, der den Kreis im gegebenen Punkte berühren und durch den gegebenen Punkt gehen soll, so wird sich die Auflösung leicht hiernach angeben lassen.

§. 465.

Aufgabe. Es ist eine Linie und ein Kreis und in seiner Peripherie ein Punkt gegeben. Man soll einen zweiten Kreis beschreiben, welcher den Kreis in dem gegebenen Punkte und die Linie berührt. Fig. 528.

Erste Auflösung. Der gegebene Kreis sey DGH; die Linie AB, der Punkt in der Peripherie des Kreises D. Man errichte durch des Kreises Mittelpunkt M die Linie GK auf der gegebenen AB senkrecht und ziehe von G durch den gegebenen Punkt D eine gerade Linie GDT bis zum Durchschnitte T mit

der Linie AB und errichte in dem Punkte F eine senkrechte Linie, ziehe durch den Mittelpunkt M und den Punkt D des gegebenen Kreises die Linie MDM' bis zum Durchschnitte M' der Senkrechten TM', so ist M' des gesuchten Kreises Mittelpunkt und M'D oder M'T sein Halbmesser, womit sich leicht der Kreis TPD beschreiben läßt.

Beweis. Nach der Construction gehen die Linien GK und TM' mit einander parallel. Demnach sind also die Winkel z und z' und zugleich die Scheitelwinkel y und y' einander gleich. Dieß führt zu dem Schlusse, daß die beiden Dreiecke MDG und M'TD einander ähnlich sind. Die Seiten MG und MD sind Halbmesser eines Kreises, folglich sind sie einander gleich und demnach sind auch die Linien M'D und M'T einander gleich und der Kreis PDT geht durch die Punkte T und D. Da aber M'T in T senkrecht auf AB steht, so berührt der Kreis die Linie AB.

Nun ist die gerade Linie M'M = M'D + DM die Centrale der beiden Kreise, folglich berührt der Kreis PTD den gegebenen Kreis in dem Punkte D.

Anmerkung. 1) Die angegebene Construction gilt nur für den Fall, wenn der zu beschreibende Kreis, Linie und Kreis ausschliesfungsweise berühren soll. Wird verlangt, daß der zu beschreibende Kreis den gegebenen GDH (Fig. 529.) einschließungsweise berühren soll, so fälle man durch des Kreises Mittelpunkt M die Linie HK senkrecht auf AB, ziehe durch die Punkte D und G die Linie DGT bis zum Durchschnitte T der Linie AB, errichte in T die Linie TM' senkrecht und ziehe durch den gegebenen Punkt D und des Kreises Mittelpunkt M die Linie DMM' bis zum Durchschnitte M' mit der Senkrechten, so ist M' des gesuchten Kreises PDT Mittelpunkt und M'D = M'T des Kreises Halbmesser. Denn es läßt sich leicht zeigen, daß die Dreiecke MDG und M'TD ähnlich sind, und daß also M'D = M'T, die Linie M'MD die Centrale der beiden Kreise M und M' und daß der Kreis PDT in dem Punkte D den Kreis und in T die Linie AB berührt.

2) Wird der gegebene Kreis von der Linie durchschnitten, so ändert dieß an der Construction nichts und der zweite Kreis fällt in den ersten, wenn die Aufgabe möglich ist.

Zweite Auflösung. Fig. 530.

Erörterung. Die Linie sey AB, der Kreis RTE und der Punkt in seiner Peripherie E, der Kreis QEH sey der

gesuchte. Da die beiden Kreise sich in E berühren sollen, so muß der Mittelpunkt P des gesuchten Kreises in der Verlängerung der Linie ME liegen, denn die Mittelpunkte und der Berührungspunkt zweier berührenden Kreise liegen in einer geraden Linie. Errichtet man in dem Punkte E eine Linie EF senkrecht auf PM, so wird sie die Tangente beider Kreise seyn, und die Linie AB in einem Punkte T durchschneiden. Da nun auch AB für den Kreis QEH eine Berührungslinie seyn soll, so muß die Entfernung der Berührungspunkte E und Q des zu bildenden Kreises gleichweit von einander abstehen.

Aus diesen Bemerkungen fließt folgende

Construction. Man ziehe durch den Mittelpunkt und den Berührungspunkt M und E eine unbestimmte Linie, errichte in E eine senkrechte Linie EF bis zum Durchschnitte F, trage EF = FQ auf die Linie AB und errichte in Q die Linie QP senkrecht bis zum Durchschnitte P mit der Centrale MP, so ist P des gesuchten Kreises Mittelpunkt und PQ sein Halbmesser. Beschreibt man mit ihm den Kreis QEH, so ist er der gesuchte.

Der Beweis führt sich nach den Bemerkungen der Erörterung leicht.

Anmerkung. Trägt man die Linie FE = FQ′ auf die entgegengesetzte Seite von F und errichtet die senkrechte Linie Q′P′ bis zum Durchschnitte P′ der Centrale MP, so gewinnt man einen zweiten auflösenden Kreis Q′H′E, welcher sich von dem Kreise QEH dadurch unterscheidet, daß er den gegebenen Kreis einschließend berührt.

Zwei auflösende Kreise sind so lange möglich, als die gegebene Linie den gegebenen Kreis weder berührt noch durchschneidet. Es ist nur ein auflösender Kreis möglich, wenn die Linie AB den Kreis entweder durchschneidet oder berührt.

Ist der Punkt E der Endpunkt des senkrechten Abstandes des Scheitelpunktes des Kreises von der Linie AB, so wird der zu bildende Kreis den gegebenen nur einschließend, bei Durchschnittslinien aber immer von innen berühren.

§. 466.

Aufgabe. Es ist ein Kreis und eine Linie und in

ihr ein Punkt gegeben. Man soll einen zweiten Kreis beschreiben, der den Kreis und die Linie in dem gegebenen Punkt berührt. Fig. 528.

Auflösung. Der gegebene Kreis sey GDH, die Linie AB und der Punkt in ihr T. Man fälle durch des Kreises Mittelpunkt M die Linie GK senkrecht auf AB, errichte ferner in dem Punkte T eine Linie TM' senkrecht, ziehe TG, so wird TG den gegebenen Kreis in einem Punkte D durchschneiden. Von dem Mittelpunkte M ziehe man nun eine Linie durch D bis zum Durchschnittspunkte M' mit der Senkrechten TM', so ist M' des gesuchten Kreises Mittelpunkt und M'D oder M'T sein Halbmesser, womit sich der gesuchte Kreis PDT beschreiben läßt.

Der Beweis führt sich auf dieselbe Weise, wie in der Aufgabe des vorhergehenden §.

Anmerkung. Ist Fig. 529. ein Kreis HDG und eine Linie AB und in ihr ein Punkt T gegeben, und soll ein Kreis beschrieben werden, welcher die Linie im gegebenen Punkte und den gegebenen Kreis einschließungsweise berührt, so errichte man in dem gegebenen Punkte T eine Linie TM' senkrecht, fälle durch des Kreises Mittelpunkt M eine Linie HGK senkrecht, so wird diese den Kreis in einem Punkte G berühren, durch diesen und den gegebenen Punkt T lege man die Linie TGD bis zum Durchschnitte D mit der Peripherie des gegebeneu Kreises und ziehe von D durch den Mittelpunkt M die Linie DMM' bis zum Durchschnitte M' mit der Senkrechten, so ist M' des gesuchten Kreises Mittelpunkt, M'D und M'T seine Radien, womit sich leicht der Kreis PDT beschreiben läßt, welcher die verlangten Eigenschaften hat.

Der Beweis führt sich aus der Aehnlichkeit der Dreiecke MDG und M'DT leicht, wenn man berücksichtigt, daß M'MD eine Centrale ist, MT senkrecht auf AB steht und folglich der Kreis PDT durch die Punkte T und D geht.

§. 467.

Aufgabe. Es sind zwei Kreise und in der Peripherie des einen ein Punkt gegeben. Man soll einen dritten Kreis beschreibeu, welcher beide Kreise be-

rührt, den einen aber in dem gegebenen Punkte. Fig. 530. a.

Auflösung. Der eine Kreis sey QEF, der zweite GDH und der Punkt in seiner Peripherie D. Man ziehe von dem Mittelpunkte M zu dem gegebenen Punkte die Linie MD, unbestimmt verlängert, und mit ihr durch den Mittelpunkt des zweiten Kreises den Halbmesser NQ parallel, verbinde die Punkte Q und D durch eine gerade Linie QED mit einander, so wird diese den zweiten Kreis in einem Punkte E durchschneiden, nun ziehe man von N durch E die Linie NEP bis zum Durchschnitte P der verlängerten Centrale MD, so ist P des gesuchten Kreises Mittelpunkt und PE oder PD sein Halbmesser, mit dem sich leicht der Kreis DEK beschreiben läßt.

Beweis. Nach der Construction sind die Scheitelwinkel x und x′ einander gleich, ebenso, da die Linien MD und NQ parallel laufen, die Winkel y und y′. Hieraus erschließt sich die Aehnlichkeit der Dreiecke NQE und EPD und es ist

$$QN : NE = PE : PD$$

Da aber QN und NE Halbmesser eines Kreises sind, so sind sie einander gleich, also sind auch die Linien PE und PD einander gleich und Halbmesser des Kreises EDP. Die Linien PN und PM sind Centralen, folglich gehet der Kreis KED durch die Punkte E und D und berührt die gegebenen Kreise in beiden Punkten.

Anmerkung. Die hier gegebene Auflösung gilt für den Fall, wann der gesuchte Kreis beide Kreise ausschließungsweise berühren soll. Sind zwei Kreise DQH und EQP (Fig. 531.) und in dem ersten der Punkt D gegeben, und es soll ein Kreis gebildet werden, der beide Kreise, den einen aber in dem gegebenen Punkte einschliessungsweise berührt; so ist die Construction im Wesentlichen nicht von der ersten verschieden. Man ziehe die verlängerte Centrale DMP und mit ihr durch den Mittelpunkt des zweiten Kreises den Halbmesser NQ parallel und dann die Linie DQE bis zum Durchschnitte E der Peripherie des zweiten Kreises und von E durch den Mittelpunkt N die Linie ENP bis zum Durchschnitte P mit der Centrale PMD, so ist P des gesuchten Kreises Mittelpunkt, PD und PE seine Halbmesser. Wird mit einem von ihnen der Kreis EDK be-

schrieben, so muß er, wie sich leicht zeigen läßt, die beiden Kreise und den einen in dem gegebenen Punkte berühren.

Die ausschließende Berührung (Fig. 530. a) ist nur dann möglich, wenn der in der Peripherie gegebene Punkt auf der Seite liegt, welche dem zweiten zugewendet ist. Die einschließende Berührung (Fig. 531.) nur dann, wenn er in der Seite liegt, welche dem zweiten abgewendet ist. Liegt der Punkt in der Peripherie da, wo beide Seiten zusammentreffen, so ist die Aufgabe unmöglich, weil dann die Linien NP und MP sich nicht begegnen.

Dieß ist der Fall, wann der gegebene Punkt so liegt, daß die durch den Endpunkt Q des mit MD parallel gezogenen Radius gezogene Linie DQ eine gemeinschaftliche Tangente für beide Kreise ist.

§. 468.

Aufgabe. Es sind zwei sich durchschneidende Linien und zwischen beiden ein Punkt gegeben. Man soll einen Kreis beschreiben, dessen Mittelpunkt in der einen liegt, die andere berührt und durch den gegebenen Punkt geht.

Erste Auflösung. Fig. 532.

Erörterung. Die Linie, in welcher des Kreises Mittelpunkt liegen soll, sey AB; diejenige, welche er berühren soll, AC; der Punkt, durch welchen er gehen soll, sey E. Nimmt man nun an, die Aufgabe sey gelöst und DEKD sey der verlangte Kreis, so läßt sich von dem Punkte E eine Linie EL senkrecht auf AB fällen, welche man auf beiden Seiten so verlängern kann, daß sie in F die berührende Linie und in K den Kreis DFKD durchschneidet. Diese Linie bildet zu dem zu bildenden Kreise eine Sekante. Ihre Größe ist bekannt; denn die Linie AB muß in der Mitte von EK auffallen, also ist LK = LE. D sey der Berührungspunkt der Tangente. Die Tangente FD ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen der Sekante FK und ihrem Abschnitte FE ausserhalb des Kreises.

Hieraus ergibt sich folgende

Construction. Man ziehe von dem Punkt E die Linie

EL auf AB senkrecht, mache LK = EL und verlängere KE bis zum Durchschnitte F mit der Linie CA, beschreibe über FK einen Halbkreis FGK und errichte in E die Linie EG senkrecht bis zum Durchschnitte G des Halbkreises, so ist FG die Linie, die der Tangente gleich ist. Nun mache man FD = FG und errichte in D eine senkrechte Linie DM bis zum Durchschnitte M der Mittelpunktslinie, so ist M des Kreises Mittelpunkt und MD der Radius des gesuchten Kreises. Mit dieser Linie läßt sich nun leicht der Kreis DEKD beschreiben.

Der Beweis führt sich nach der Erörterung leicht.

Anmerkung. Man sieht leicht, daß sich zwei Kreise bilden lassen, die den Forderungen der Aufgabe genügen. Der zweite entsteht, wenn man FD = FD′ macht, in dem Punkte D′ eine senkrechte Linie D′M′ bis zum Durchschnitte M′ der Linie AB zieht. M′ ist des Kreises Mittelpunkt, M′D′ der Radius. Mit ihm kann man nun leicht den Kreis D′EK beschreiben. FK erscheint für ihn als Sekante und FD′ als das Stück zwischen der Sekante und zwischen dem Berührungspunkte.

Zweite Auflösung. Fig. 533.

Erörterung. Fällt man von einen beliebigen Punkte m der Linie AB, worin des Kreises Mittelpunkt liegen soll, eine senkrechte Linie md auf CA und beschreibt mit dieser Senkrechten md, als Radius, den Kreis dgkd; nimmt man den zu beschreibenden Kreis DEHD als gegeben an und zieht durch den gegebenen Punkt E und dem Scheitelpunkt A die unbestimmte Linie AE, so wird diese den Kreis dgkd in zwei Punkten s und r durchschneiden. Die beiden Kreise dgkd und DEHD werden aber gegen die gegebenen Linien eine ähnliche Lage haben; die Radien, von ähnlichen Punkten E und r auf ihre Mittelpunkte gezogen, werden unter sich parallel seyn. Diese Bemerkungen führen zu folgender

Construction. Man ziehe die Linie AE unbestimmt und fälle von irgend einem willkührlichen Punkte m auf DA eine Senkrechte md, beschreibe mit dieser, als Radius, einen Kreis dgks, so wird seine Peripherie in den Punkten s und r von der Linie AE durchschnitten werden. Nun ziehe man den Radius rm und mit diesem durch E den Radius EM parallel

bis zum Durchschnitte M mit der Mittelpunktslinie, so ist M des Kreises Mittelpunkt, ME der Radius. Mit dieser Linie läßt sich nun leicht der Kreis DEHD beschreiben, welches der gesuchte ist, denn es ist

$$EM : MD = rm : md = 1 : 1$$

also beide Linien einander gleich.

Anmerkung. Wird durch E mit ms die Parallele EM' gezogen, so findet man den Punkt M', welcher der Mittelpunkt eines zweiten Kreises CEFC ist, der gleichfalls den Bedingungen der Aufgabe genügt.

Dritte Auflösung. Fig. 534.

Erörterung. Die Erörterung zur ersten Auflösung hat zu der Bemerkung geführt, daß die Aufgabe durch den Satz

$$FD^2 = FK \,.\, EF$$

aufgelöst wird, wenn FD die gesuchte Tangente und FK die durch den Punkt E auf AB senkrecht gefällte Linie ist, welche eine Sekante zu dem gesuchten Kreise bildet. Stößt man nun die Linie LK aus der Construction aus, was recht gut geschehen kann, da LK = EL ist, und setzt EL für LK, so hat man

$$FD^2 = (FL + EL)\ EF$$

Führt man auch die Linie EF auf LF und EL zurück, so ist

$$EF = FL - EL$$

und hieraus gewinnt man durch Einführung dieses Werthes in obige Gleichung

$$FD^2 = (FL + EL)\ (FL - EL) = FL^2 - EF^2$$

Dieser Satz führt mittelst des pythagoräischen Lehrsatzes zur folgenden sehr einfachen

Construction. Man fälle durch den Punkt E die Linie FL auf die Mittelpunktslinie AB senkrecht und verlängere sie bis zum Durchschnitte F mit AC, beschreibe über LF einen Halbkreis und trage LH = LE, als Sehne, in denselben; ziehe FH und mache FD = FH, so ist D der gesuchte Berührungspunkt. Errichtet man in dem Punkte D die Linie DM senkrecht, so ist ihr Durchschnitt M mit der Mittelpunkts-Linie AB der Mittelpunkt des gesuchten Kreises und MD sein Halbmesser, womit sich nun leicht der Kreis DEKD beschreiben läßt.

Der Beweis fließt unmittelbar aus obiger Erörterung, denn es ist

$$FD = FH = \sqrt{FL^2 - LH^2} = \sqrt{FL^2 - EL^2}$$

Mit der hier aufgelösten Aufgabe ist auch die aufgelöst: Einen Kreis zu beschreiben, der zwei gegebene Linien berührt und durch einen zwischen beiden liegenden Punkt geht. Da nämlich die beiden Linien Tangenten des gesuchten Kreises bilden sollen; so muß die, den von ihnen erzeugten Winkel halbirende Linie durch des Kreises Mittelpunkt gehen und demnach ist die Auflösung dieser Aufgabe in jener enthalten.

§. 469.

Aufgabe. Es ist eine unbestimmte Linie und es sind ausser ihr zwei Punkte gegeben. Man soll einen Kreis beschreiben, der die Linie berührt und die Punkte durchschneidet. Fig. 535.

Erste Auflösung. Die Linie sey AB, die Punkte D und E. Man lege durch die beiden Punkte D und E eine Linie DE bis zum Durchschnitte B mit der geraden Linie, beschreibe über DB einen Halbkreis und errichte in dem Punkte E eine Senkrechte EG bis zum Durchschnitte G des Halbkreises DGB, ziehe BG und mache BH = BG; errichte in H und in dem Mittelpunkte K der beiden Punkte D und E die senkrechten Linien HM und KM bis zu ihrem Durchschnitte M, so ist MH der Radius. Mit ihm läßt sich nun leicht der Kreis DHE beschreiben, welcher die Bedingungen der Aufgabe erfüllen wird.

Beweis. Ziehet man die Linie DEB durch die beiden Punkte und bis zum Durchschnitte mit der berührenden Linie AB, so muß der zu beschreibende Kreis eine solche Lage bekommen, daß AB als Tangente und DB als Sekante erscheint.

Die Richtigkeit der Construction gründet sich nun auf den Satz: daß die Tangente die mittlere geometrische Proportionale zwischen der ihr zugehörigen Sekante und ihrem äussern Abschnitte ist. Beschreibt man nun einen Halbkreis über DB und errichtet in E eine Senkrechte EG bis zum Durchschnitte G

und zieht GB, so ist GB die mittlere geometrische Proportionale zwischen DB und EB, also der gesuchten Tangente gleich. Macht man nun BH = GB und errichtet in ihrem Endpunkte H eine Senkrechte HM, so muß sie durch des Kreises Mittelpunkt gehen. Ein Gleiches muß die Linie thun, welche in dem Mittelpunkte K der Sehne DE senkrecht errichtet wird, der Punkt in dem sich beide schneiden, wird also des Kreises Mittelpunkt M und MH der Radius seyn. Mit dieser Linie läßt sich der Kreis DHE beschreiben.

Zweite Auflösung. Fig. 536.

Erörterung. Verbindet man die Punkte D und E durch eine gerade Linie und errichtet in ihrem Mittelpunkte K eine senkrechte Linie KP bis zu dem Durchschnitte P mit der gegebenen Linie AB, so muß des zu beschreibenden Kreises Mittelpunkt in dieser Linie liegen. Fällt man nun von irgend einem Punkte K in der Linie PK eine senkrechte Linie Kh auf AB und beschreibt mit dieser Linie, als Radius, den Kreis dhu, so berührt die Linie AB den Kreis dhu. Nimmt man nun weiter den zu suchenden Kreis DHE als gefunden an, so liegt auch sein Centrum in der Linie PK und AB ist eine gemeinschaftliche Berührende für beide Kreise. Die Linie PK ist die Centrale der beiden Kreise. Dieß führt zu dem Schlusse: daß die Kreise DHE und dhu ähnlich gelegene Kreise sind. Zieht man daher von P durch einen der Punkte D oder E die Sekante PDd, von K die Radien Kh und dK und von M die Radien MH und MD, so werden diese unter sich parallel seyn. Diese Bemerkungen führen zu folgender

Construction. Man verbinde die Punkte D und E durch eine gerade Linie DE, errichte in ihrem Mittelpunkte K eine senkrechte Linie KP bis zum Durchschnitte P mit AB, fälle von irgend einem Punkte K der Linie KP eine Senkrechte Kh auf AB und beschreibe mit dieser Linie einen Kreis. Nun ziehe man von P durch D die Linie PDd bis zum Durchschnitte d des Kreises dhu und dann den Radius dK, darauf parallel mit dK durch den Punkt D die Linie DM, so ist der Durchschnittspunkt M des zu beschreibenden Kreises Mittelpunkt.

Denn es verhält sich

$$dK : Kh = DM : MH = 1 : 1$$

also ist DM = MH = ME.

Anmerkung. Man sieht leicht, daß die erste Auflösung nur dann anwendbar ist, wenn die Linie DE sehr stark gegen AB convergirt und also ihr Vereinigungspunkt B nicht weit von E entfernt ist. Convergiren die beiden Linien aber sehr wenig und ist ihr Vereinigungspunkt B sehr weit entfernt, so ist diese Constructions-Art nicht wohl anwendbar. In diesem Falle wird also die zweite Auflösung den Vorzug verdienen.

Ist aber der Vereinigungspunkt B sehr nahe am Berührungspunkte, oder kommt der Winkel DBA, welchen die Linien AB und DB mit einander bilden, einem Rechten sehr nahe, so fällt der Durchschnittspunkt P von H sehr weit weg und dann ist die zweite Auflösung nicht anwendbar. Beide Auflösungen unterstützen sich also. Die erste ist bei sehr convergirenden, die zweite bei wenig convergirenden Linien vorzuziehen.

Eine dritte Auflösung fließt aus der Erörterung zu der dritten Auflösung der vorhergehenden Aufgabe Fig. 534, wenn E und K die gegebenen Punkte und CA die Linie ist. Man ziehe die Linie KE bis zum Durchschnitte F mit CA, errichte in der Mitte L der Punkte K, E die senkrechte Linie LA, beschreibe über FL, als Durchmesser, einen Halbkreis und trage LE = LH, als Sehne, in denselben, ziehe FH und mache FD = FH, so ist D der Punkt, in welchem der Kreis die Linie berühren wird. Errichtet man eine senkrechte Linie DM bis zum Durchschnitte mit LA, so ist M des gesuchten Kreises Mittelpunkt und MD sein Halbmesser, womit sich der Kreis DEK leicht beschreiben läßt.

§. 470.

Aufgabe. Es sind zwei sich in einem Punkte durchschneidende Linien und zwischen beiden ein Kreis gegeben. Man soll einen Kreis beschreiben, der die beiden Linien und den gegebenen Kreis berührt.

Auflösung. Fig. 537. Die gegebenen Linien seyen AB und AC, der Kreis gfkg und sein Mittelpunkt m. Man hal-

dire den Winkel BAC, welchen beide Linien mit einander bilden, durch die Linie AQ. Nun ziehe man mit den Linien AB und AC innerhalb beider die parallelen Linien ab und ac und zwar so, daß ihr Abstand dem Radius mk des gegebenen Kreises gleich ist. Nun beschreibe man nach §. 468. einen Kreis trmt, der die beiden Parallelen ab und ac berührt und durch des Kreises Mittelpunkt m geht, so ist der Mittelpunkt M dieses Kreises zugleich der Mittelpunkt des gesuchten Kreises. Fällt man nun von M auf eine der gegebenen Linien AC die senkrechte Linie MT, oder verlängert man die Linie Mm durch des Kreises Mittelpunkt bis zu seiner Peripherie, so ist jede dieser Linien des Kreises Radius. Mit ihm läßt sich nun leicht der Kreis TRkT, welcher der gesuchte ist, beschreiben.

Beweis. Da die Linie AQ den Winkel, welchen beide Linien mit einander bilden, halbirt, so muß in ihr des zu beschreibenden Kreises TRkT Mittelpunkt liegen, weil sonst die beiden Linien ihn nicht berühren könnten. Beschreibt man nun einen Kreis trmt, der die innern Parallelen ab und ac berührt und durch des gegebenen Kreises Mittelpunkt geht, so müssen die Linien Mt und Mr, als Radien eines Kreises, einander gleich seyn. Zieht man nun von M auf ac eine senkrechte Linie Mt, so muß diese Linie den Kreis in dem Punkte treffen, wo der Kreis trmt die Linie berührt, verlängert man die Linie Mt bis zum Durchschnitte T mit AC, so muß MT senkrecht auf AC stehen; beschreibt man nun mit MT, als Radius, einen Kreis, so muß dieser die Linie AC berühren.

Vergleicht man nun die beiden Linien MT und Mk mit einander, so ist, da nach der Construction der Abstand Tt der Parallelen AC und ac, dem Radius mk gleich ist,

$$Mt + tT = Mm + mk$$

$$\text{oder } MT = Mk$$

folglich muß der beschriebene Kreis TkRT durch den Punkt T und k gehen.

Die Kreise TkRT und kfgk haben die gemeinschaftliche Centrale Mm und die Peripherie des Kreises kRTk geht durch

den Endpunkt des Halbmessers mk, also berührt er den Kreis kfgk in dem Punkte k.

Berücksichtigt man endlich, daß der Kreis TRkT auch die Linie AB in dem Punkte R berühren muß, so erfüllt der so beschriebene Kreis die Bedingungen der Aufgabe.

Anmerkung. Diese Aufgabe läßt auch noch eine zweite Auflösung zu, denn es läßt sich auch ein Kreis T'R'gT' beschrieben denken, der die beiden Linien AB und AC und den Kreis kfgk ausschließungsweise berührt. Um diesen Kreis zu beschreiben, ziehe man ausserhalb der beiden Linien AB und AC mit dem senkrechten Abstande des Radius mk des gegebenen Kreises die Parallelen $\alpha\beta$ und $\alpha\gamma$, beschreibe nach §. 468. einen Kreis t'r'mt', der die beiden Parallelen berührt und durch des Kreises Mittelpunkt m geht, so ist M' des gesuchten Kreises Mittelpunkt. Fällt man nun von M' auf AC eine senkrechte Linie M'T' senkrecht, so ist M'T' des gesuchten Kreises Radius, womit sich leicht der gesuchte Kreis T'R'gT' beschreiben läßt, der die beiden Linien AB und AC in den Punkten T' und R' und den Kreis gfkg in g berührt.

Zusatz. Es ist leicht einzusehen, daß noch zwei Kreise möglich sind, die die beiden Linien AB und AC und den gegebenen Kreis gfkg berühren, deren Mittelpunkte in der verlängerten Linie AQ also auf der entgegengesetzten Seite von den Punkten M und M' liegen. Die Aufgabe läßt also vier auflösende Kreise zu.

Durchschneidet der gegebene Kreis eine Linie, so sind gleichfalls vier auflösende Kreise möglich. Werden beide Linien rückwärts verlängert und sämmtlich von dem gegebenen Kreis durchschnitten, so sind acht auflösende Kreise möglich.

§. 471.

Aufgabe. Es sind zwei, sich in einem Punkte durchschneidende, Linien und ein Kreis, welcher beide berührt, gegeben. Man soll einen Kreis beschreiben, welcher beide Linien und den gegebenen Kreis berührt. Fig. 538.

Erörterung. Die Linien seyen AB und AC, der Kreis TDEGT. Zieht man von dem Durchschnittspunkte A der beiden Linien AB und AC durch den Mittelpunkt M des Kreises

die Linie AP, so halbirt sie den Winkel BAC und folglich muß des zu suchenden Kreises Mittelpunkt m in dieser Linie liegen. tKeDt sey nun der gesuchte Kreis, so bildet mM die Centrale beider Kreise, folglich muß ihr Berührungspunkt D in der Centrale Mm liegen und beide Kreise müssen eine gemeinschaftliche Tangente qDv haben, welche durch den gemeinschaftlichen Endpunkt D der Durchmesser beider Kreise geht. Zieht man nun diese Tangente und berücksichtigt, daß auch die Linie AC eine Tangente für beide Kreise seyn muß, so zieht man hieraus, da qD und qT Tangenten des gegebenen Kreises TDEGT und qD und qt Tangenten des zu suchenden Kreises seyn müssen, die Folgerung: daß diese drei Linien qT, qD und qt gleich seyn müssen. Diese Bemerkungen führen zu folgender

Construction. Man ziehe von dem Durchschnittspunkte A durch den Mittelpunkt M des gegebenen Kreises eine Linie AP und errichte an dem Durchschnittspunkte D eine Tangente Dq zu dem Kreise TDEGT, mache Dq = qt, so ist t der Punkt, worin der zu beschreibende Kreis die Linie AC berührt. Nun errichte man in dem Punkte t eine senkrechte Linie bis zu dem Durchschnittspunkte m mit der Halbirungslinie AP, so ist m des gesuchten Kreises Mittelpunkt und mt der Radius des Kreises. Beschreibt man mit ihm den Kreis tkeDt, so wird er die Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

Der Beweis führt sich aus der obigen Erörterung leicht.

Anmerkung. Man erkennt leicht, daß sich ein zweiter Kreis Ge′Pt′G bilden läßt, der den Anforderungen der Aufgabe gleichfalls genügt, wenn man in dem Punkte G eine Tangente errichtet, die Linie Qt′ = QG macht und dann wie oben verfährt. Es gibt also zwei auflösende Kreise.

Die Aufgabe ist eigentlich ein specieller Fall, von der in §. 470. gegebenen. Sie läßt sich aber, wie hier angegeben ist, durch eine einfachere Construction lösen.

§. 472.

Aufgabe. Es ist ein Kreis, eine Linie und ein

Punkt gegeben. Man soll einen Kreis beschreiben, der durch den Punkt geht, die Linie und den gegebenen Kreis ausschließend berührt. Fig. 539.

Erörterung. Der gegebene Kreis sey ghk, der Punkt C und die Linie AB. Man nehme an: der Kreis TvbC, welcher die geforderten Eigenschaften hat, und den Kreis ghk in dem Punkte v berührt, sey gegeben. Man fälle durch des Kreises Mittelpunkt M die Linie hML senkrecht auf AB und ziehe von h auf den gegebenen Punkt C die Linie hbC, so hat man die vier Punkte C, b, k, L, die bekanntlich ein Viereck bilden, dessen Winkelspitzen in einem Kreise liegen. Durch diese Punkte läßt sich daher ein Kreis beschreiben. Dieser Kreis ist aber auch schon durch die drei Punkte L, k und C bestimmt. Der Punkt b bestimmt sich durch diesen Kreis und die Linie hc. Ist nun der Punkt b gegeben, so ist die Aufgabe darauf zurückgeführt: durch zwei auf einer Seite einer geraden Linie liegende Punkte einen Kreis zu ziehen, der die gerade Linie berührt (§. 469). Verlängert man daher die Linie hC bis zum Durchschnitte p mit der Linie AB, so hat man nun die Aufgabe zu lösen: den Punkt T, wo die Linie pT den Kreis bCT berührt, zu bestimmen, und dieß geschieht auf eine im §. 469. angegebene Weise.

Da nun pT die Tangente, die mittlere Proportionale zwischen der Sekante und ihrem äussern Abschnitte, und die Linie bCp die Sekante zu dem gesuchten Kreise vbcT und dem Kreise LkbC ist, also auch die, von dem Punkte p aus an beide Kreise gezogenen, Tangenten einander gleich seyn müssen, so führt diese Bemerkung zu folgender

Construction. Man fälle durch den Mittelpunkt M die durchschneidende Linie hkL senkrecht auf AB, und beschreibe durch die Punkte L, k, c den Kreis Lkbc §. 423, ziehe von h aus durch C die Linie hCp bis zum Durchschnitte p der Linie AB, ziehe von p an den so eben gezogenen Kreis Lkbc eine Tangente pQ und mache pT = pQ, errichte in T die Linie TM

senkrecht und in dem Mittelpunkt r der Linie bC die Linie rm gleichfalls senkrecht, verlängere beide Linien bis zu ihrem Durchschnitte M, so ist M des gesuchten Kreises Mittelpunkt und mT sein Radius. Mit diesem läßt sich nun der gesuchte Kreis Tvbc leicht beschreiben, welcher die gesuchten Eigenschaften hat.

Anmerkung. Liegt der Punkt C näher am Kreise als an der Linie, so daß also b und c ihre Stellung verändern, so ändert dieß an der Auflösung nichts.

Es gibt einen zweiten Kreis v'bCT, der gleichfalls der Aufgabe genügt, wenn die Linie pT' = pQ gemacht, in T' eine Senkrechte und in dem Mittelpunkte r der Sehne bC auch eine Senkrechte errichtet wird. Ihr Durchschnittspunkt M' ist des gesuchten Kreises Mittelpunkt und M'T' sein Radius.

§. 473.

Aufgabe. Es ist ein Kreis, ein Punkt und eine Linie gegeben. Man soll einen Kreis beschreiben, der durch den gegebenen Punkt geht, die Linie und den Kreis einschließend berührt. Fig. 540.

Erörterung. Der gegebene Kreis sey vhf, der Punkt C und die Linie AB. Man nehme an, die Aufgabe sey gelöst und TvC sey der Kreis, welcher durch den Punkt C geht, den gegebenen Kreis in v und die Linie AB in T berührt. Man fälle durch des Kreises vfh Mittelpunkt M die Linie hfL senkrecht auf AB, ziehe von C nach h und L die Linien Ch und CL und durch f die Linie Cfb bis zum Durchschnitte b mit dem gesuchten Kreis, so hat man die vier Punkte C, h, b, L, die in einem Kreise liegen. Dieser Kreis ist aber schon durch die drei Punkte h, C und L bestimmt. Durch die zwei Punkte C und f ist die Linie Cfb und durch den Durchschnitt dieser Linie mit dem Kreise ChbL ist auch der Punkt b bestimmt. Dieser Punkt liegt aber auch in dem Kreise vCT, welcher den gegebenen Kreis und Linie berührt. Hiernach ist die Aufgabe, da b und C gegeben sind, auf den Fall zurück gebracht: durch zwei Punkte einen Kreis zu beschreiben, der eine gegebene Linie berührt. Verlängert man die Linie Cb bis zum Durchschnitte p mit AB, so ist zwischen pC

und bC die mittlere geometrische Proportionale zu suchen. Hieraus ergibt sich, wie in dem vorhergehenden §. folgende

Construction. Man fälle durch den Mittelpunkt M des gegebenen Kreises die Linie hL senkrecht auf AB, beschreibe durch die drei Punkte h, C, L den Kreis hCL und ziehe von C durch f die Linie Cfp bis zum Durchschnitte p mit der Linie AB, ziehe von p an den eben gezogenen Kreis ChbL die Tangente pQ, mache pT = pQ und errichte in T die Linie TM senkrecht, ebenso errichte man in dem Mittelpunkte e der Linie bC die Linie eM senkrecht, so ist der Durchschnitt M dieser Linien des gesuchten Kreises Mittelpunkt und MT sein Halbmesser, womit man leicht den Kreis TvC beschreiben kann.

Anmerkung. Macht man pT′ = pQ, errichtet in T′ eine senkrechte Linie und eben so in dem Mittelpunkt e der Linie bC eine senkrechte, so ist ihr Durchschnittspunkt m′ der Mittelpunkt eines zweiten Kreises T′v′C, der gleichfalls die gegebenen Bedingungen erfüllt. Es gibt daher auch für diesen Fall zwei auflösende Kreise.

Diese und die vorige Aufgabe ist nur unter der Voraussetzung möglich, daß der gegebene Punkt und Kreis auf der nämlichen Seite der gegebenen Linie liegen.

§. 474.

Aufgabe. Es sind zwei gleiche Kreise und ausser ihnen eine Linie gegeben. Man soll einen dritten Kreis beschreiben, der beide Kreise ausschließungsweise und die Linie berührt. Fig. 541.

Auflösung. Die gegeben Kreise seyen EGK und DHF, die gegebene Linie AB. Man ziehe in der Entfernung des gemeinschaftlichen Halbmessers beider Kreise TT′ = EM auf der entgegengesetzten Seite mit der Linie AB eine Parallele ab und beschreibe einen Kreis nach §. 469. MNT′, welcher durch die Mittelpunkte beider Kreise geht und die Linie ab berührt, dessen Mittelpunkt P ist. Nun fälle man von P auf AB die Linie PT senkrecht und beschreibe mit PT, als Halbmesser, den Kreis TDE, so ist dieser der gesuchte Kreis und berührt die beiden Kreise in D und E und die Linie AB in T.

Beweis. Zieht man durch die Mittelpunkte M und N die Linien PM und PN, so sind diese Linien Centrale, verlängert man PT bis zum Durchschnitte T' der Parallele ab, so muß diese senkrecht auf ab stehen und geht durch den Berührungspunkt des Kreises. Demnach sind die Linien PM, PN und PT einander gleich. Geht man von diesen Linien auf PE, PD, PT über, so sind diese sämmtlich um den gemeinschaftlichen Halbmesser der gegebenen Kreise kleiner, also ist auch PE = PD = PT und folglich geht der gesuchte Kreis durch den Endpunkt T des auf AB senkrecht stehenden Radius, berührt also diese Linie und, da er die Endpunkte E und D der Radien ME und ND trifft, auch die gegebenen Kreise, erfüllt also die Bedingungen der Aufgabe.

Anmerkung. Sind zwei gleiche Kreise DKH und GEK und eine Linie AB gegeben und man soll einen Kreis beschreiben, der die Linie und beide Kreise einschließungsweise berühre, so führt eine ähnliche Construction zum Ziele. Fig. 542.

Man ziehe in der Entfernung des gemeinschaftlichen Halbmessers auf der nämlichen Seite von AB, wo die Kreise liegen, die Parallele ab und beschreibe einen Kreis T'MN, welcher dieselbe berührt und durch die Mittelpunkte M und N der beiden Kreise geht, dann fälle man von des beschriebenen Kreises Mittelpunkt P auf AB die senkrechte Linie PT und beschreibe mit ihr, als Halbmesser, den Kreis DET, so ist dieß der gesuchte Kreis, denn es ist PT = PD = PE; PD und PE sind Centralen; also geht der Kreis DET durch die Endpunkte der Halbmesser D und E der gegebenen Kreise und berührt AB.

§. 475.

Aufgabe. Es sind zwei ungleiche Kreise und eine Linie gegeben. Man soll einen dritten Kreis beschreiben, der die Linie und beide Kreise ausschließungsweise berührt. Fig. 543.

Auflösung. Die gegegebenen Kreise seyen DHF und

EGK, die Linie sey AB. Man bilde mit dem Ueberschuß des Radius des größern Kreises über den des kleinern Nd = ND — ME einen mit dem größern Kreise concentrischen fhd, ziehe mit AB auf entgegengesetzter Seite der beiden Kreise in der Entfernung des kleinern Radius TT′ = ME die Linie ab parallel und beschreibe nun nach §. 472. einen Kreis, welcher den so eben gebildeten fhd und die Parallele ab berührt und durch des kleinern Kreises Mittelpunkt M geht und dessen Mittelpunkt P ist. Nun fälle man von P auf AB die senkrechte Linie, so ist PT des gesuchten Kreises Halbmessee, mit dem sich nun leicht der Kreis DET beschreiben läßt, der die verlangten Eigenschaften besitzt.

Beweis. Man ziehe die Linien NP, MP und PT, da der Kreis durch M geht und die Linie ab und den Kreis fhd berührt, so sind die Linien Pd, PM und PT′, als Halbmesser dieses Kreises, einander gleich. Nun ist ferner nach der Construction dD = ND — Nd = ND — (ND — ME) = ME, und TT′ = EM, also sind auch die Linien dD, ME und TT′ einander gleich. Da nun von P aus der Kreis TDE mit dem Radius PT gezogen wurde, so geht er durch die Punkte T, E und D. In T steht der Radius senkrecht auf der Linie AB, in D und E trifft er die Endpunkte der Halbmesser der gegebenen Kreise, also berührt der Kreis DET die beiden Kreise und die gegebene Linie.

Anmerkung. Sind Fig. 543. a. zwei ungleiche Kreise GEK und DGF und eine Linie AB gegeben und man soll einen Kreis beschreiben, der beide Kreise einschließungsweise und die Linie berührt, so beschreibe man mit dem Ueberschusse des Halbmessers des größern Kreises über den des kleinern Nd = ND — ME einen mit dem größern Kreise concentrischen dhf und lege mit der Linie AB auf der Seite, wo die Kreise liegen, in der Entfernung des Halbmessers des kleinern Kreises TT′ = ME die Linie ab parallel, beschreibe einen Kreis, §. 473, welcher die so eben gezogene Linie und den neu beschriebenen Kreis einschließend berührt durch des kleinern Kreises Mittelpunkt M geht und dessen Mittelpunkt P ist; nun ziehe man von P durch den Mittelpunkt M

einer

einer der beiden Kreise die Linie PE bis zum Durchschnitte der Peripherie, so ist diese Linie des gesuchten Kreises Halbmesser. Mit diesem läßt sich der Kreis TDE leicht beschreiben.

Der Beweis führt sich leicht.

§. 476.

Aufgabe. Es sind zwei ungleiche Kreise und eine Linie gegeben. Man soll einen dritten Kreis so beschreiben, daß er die Linie und beide Kreise, den einen einschließungsweise und den andern ausschließungsweise berühre. Fig. 544.

Auflösung. Die Kreise seyen DFH und EGK, die Linie AB, der Kreis DFH soll einschließungsweise berührt werden. Man beschreibe mit dem Kreise, der einschließungsweise berührt werden soll, einen concentrischen Kreis, dessen Halbmesser der Summe beider Halbmesser Nd = ND + ME gleich ist; ferner ziehe man mit der Linie AB auf der entgegengesetzten Seite von den gegebenen Kreisen in der Entfernung des kleinern Halbmessers TT' = EM die Linie ab parallel und beschreibe nach §. 472. einen dritten Kreis dMT', welcher die eben gezogene Parallele und den concentrischen Kreis einschließend berührt und durch den Mittelpunkt M geht. Von P fälle man auf AB eine Senkrechte PT, so ist diese der Radius des gesuchten Kreises. Mit ihm läßt sich nun der Kreis DET beschreiben, welcher beide Kreise und die Linie nach den Bedingungen der Aufgabe berührt.

Beweis. Man verlängere die Linie PT bis zum Durchschnitte von ab, so steht PT' senkrecht auf ab und trifft daher den Punkt, wo der Kreis die Linie ab berührt, ist folglich ein Halbmesser des Kreises dMT; zieht man von P bis zu M die Linie PM, und durch den Mittelpunkt N die Linie PNd, so sind auch diese Linien Radien desselben Kreises und also einander gleich. Nun ist nach der Construction dD = EM, EM = TT', also auch TT' = dD und hieraus folgt, daß die Linien PD, PE und PT einander gleich und folglich

Radien des Kreises DET sind. Nun geht der Kreis DET durch die Punkte D und E der Centralen PM und DP der gegebenen Kreise, folglich berührt er die Kreise; geht durch den Endpunkt des Radius PT, der auf AB senkrecht aufsteht, und erfüllt die Bedingungen der Aufgabe.

Anmerkung. Sind die beiden gegebenen Kreise gleich, so ändert dieß an der Construction nichts.

§. 477.

Aufgabe. Es ist ein Kreis und ausser ihm sind zwei Punkte gegeben. Man soll einen Kreis beschreiben, welcher durch die beiden Punkte geht und den gegebenen Kreis berührt. Fig. 545.

Auflösung. Der gegebene Kreis sey DEG, die beiden Punkte H und K. Man lege irgend einen Kreis HKGE mit beliebigem Halbmesser so durch die beiden Punkte H und K, daß er den gegebenen Kreis in zwei Punkten E und G durchschneide, lege durch diese Punkte die unbestimmte Linie EGP und durch die gegebenen Punkte H und K die Linie HKP bis zum Durchschnitte P der eben gezogenen, lege nun von P eine Tangente PD so an, daß sie auf dieselbe Seite fällt, wo die gegebenen Punkte liegen, beschreibe dann durch die beiden Punkte H und K und den Berührungspunkt D den Kreis HDK, so erfüllt er die Bedingungen der Aufgabe.

Beweis. Da die Linie PE und PH Sekanten des Kreises EGKH sind, so ist

$$HP \,.\, KP = EP \,.\, GP$$

die Linie EP ist zugleich eine Sekante des gegebenen Kreises EGD und die Linie HP eine des construirten Kreises HDK. Nun ist DP eine Tangente zu dem Kreise EDG, also ist

$$EP \,.\, PG = DP^2$$

Da aber $HP \,.\, KP = EP \,.\, GP$ ist, so ist auch

$$HP \,.\, KP = DP^2$$

folglich ist die Linie DP auch eine Tangente zu dem Kreise HDK. Also berührt der beschriebene Kreis HDK in dem Punkte D den gegebenen und geht durch die gegebenen Punkte.

Anmerkung. Die so eben gegebene Construction gilt für den Fall, wenn der gesuchte Kreis den gegebenen ausschließungsweise berühren soll. Ist aber Fig. 546. ein Kreis EDG und ausser ihm zwei Punkte H und K gegeben, und man soll einen Kreis bilden, der den gegebenen einschließungsweise berührt und durch die gegebenen Punkte geht; so beschreibe man wie vorhin einen Kreis HEGK, der durch die gegebenen Punkte geht und den gegebenen Kreis in den zwei Punkten E und G schneidet, ziehe Linien durch die Punkte H und K, E und G bis zu ihrem Durchschnitte P und ziehe von P an den gegebenen Kreis, aber auf der entgegengesetzten Seite, wo die Punkte liegen, die Tangente PD, ziehe ferner durch ihren Berührungspunkt und die gegebenen Punkte den Kreis DHK, so berührt er den gegebenen Kreis in dem Punkte D einschließungsweise und geht durch die gegebenen Punkte.

Der Beweis führt sich auf gleiche Weise, wie der vorige, durch die Gleichungen $EP . GP = HP . KP = DP^2$.

Zur Möglichkeit dieser Aufgabe ist nothwendig, daß beide Punkte entweder ausserhalb, oder innerhalb des Kreises liegen.

§. 478.

Aufgabe. Es ist ein Kreis gegeben und in ihm zwei Punkte. Man soll einen zweiten Kreis beschreiben, der durch die beiden Punkte geht und den Kreis berührt. Fig. 546.

Auflösung. Der gegebene Kreis sey DHK, die beiden Punkte seyen E und G. Man beschreibe durch sie einen willkührlichen Kreis EGKH, welcher den gegebenen in den beiden Punkten H und K durchschneidet, ziehe durch E und G, H und K die Linien HKP und EGP bis zu ihrem Durchschnitte P und von P an den gegebenen Kreis die Tangente PD, beschreibe einen Kreis EGD, welcher durch den Berührungspunkt der Tangente und die beiden Punkte E und G geht, so ist er der gesuchte.

Der Beweis führt sich aus dem Vorhergehenden leicht.

Anmerkung. Die eben angegebene Construction gilt für den Fall, wenn der gesuchte Kreis den gegebenen in dem nämlichen Halbkreis berühren soll, worin die gegebenen Punkte liegen. Soll er

ihn aber in dem entgegengesetzten Halbkreis berühren, so muß die Tangente an diesen gezogen werden. Um die Figur nicht zu verwirren, ist dieser Fall nicht angegeben.

§. 479.

Die in dem Vorhergehenden angegebenen zwei Auflösungen sind sehr praktisch, so lange die vier Punkte H und K, E und G zwei ziemlich convergirende Linien erzeugen. Sie werden aber dann, wann die Punkte so liegen, daß sie sehr wenig convergirende Linien erzeugen, sehr unpraktisch; für diesen Fall kann man sich folgender Auflösungen bedienen, die auf dem Satze beruhen: daß wenn in zwei sich berührenden Kreisen zwei Sehnen durch den Berührungspungspunkt bis zu den Durchschnitten der Peripherie der Kreise gezogen werden, die Durchschnittspunkte parallel liegen. Die Auflösung des vorliegenden Problems fällt also damit zusammen: zu den zwei gegebenen Punkten eine Parallele im Kreise zu ziehen, um dadurch den Berührungspunkt zu finden.

Ist daher ein Kreis EGD (Fig. 547.) und ausser ihm zwei Punkte H und K gegeben und man soll einen zweiten bilden, der den gegebenen berührt und durch die beiden Punkte geht, so ziehe man von dem einen Punkt H eine Tangente HF an den Kreis, dann ziehe man HK und suche zu HK und HF die dritte Porportionale HP, trage diese auf HK an, ziehe von P an den Kreis die Tangente PG und ziehe von ihrem Berührungspunkte G die Linie GH, so wird diese den Kreis in einem Punkte D durchschneiden; durch diesen und die beiden gegebenen Punkte lege man den Kreis HDK, so wird dieser die gesuchten Eigenschaften haben.

Beweis. Nach der Construction ist

$$FH^2 = HG \cdot HD$$

denn HF ist eine Tangente und HG eine Sekante zum gegebenen Kreise; eben so ist

$$FH^2 = HP \cdot HK$$

hieraus folgt $HG \cdot HD = HP \cdot HK$

dieß führt zu folgender Proportion

$$HG : HP = HK : HD$$

und diese zu dem Schlusse, daß GDKP ein Viereck im Kreise ist und daß folglich die gegenüberstehenden Winkel DKP + DGP zwei Rechte betragen.

Zieht man nun durch die Punkte K und D die Linie KDE bis zum Durchschnitte E der Peripherie und dann EG, so ist der Winkel HGP, den die Tangente mit der Sehne GD bildet, dem Winkel DEG im entgegengesetzten Abschnitte gleich, also

$$PKE + KEG = PKE + DGP = 2R$$

und die beiden Linien EG und HK parallel. Demnach geht GH durch den Berührungspunkt und der Kreis HDK erfüllt die Bedingungen der Aufgabe.

Ist Fig. 548. ein Kreis EDG und ausser ihm zwei Punkte H und K gegeben und man soll einen zweiten Kreis beschreiben, der den gegebenen einschließungsweise berührt und durch die beiden Punkte geht, so ziehe man von dem einen Punkte H an den gegebenen Kreis eine Tangente HF und ziehe dann die Linie KH, suche zu ihr und der Tangente FH die dritte Proportionale HP, trage sie von H auf HP an, von P lege man eine Tangente PG an den gegebenen Kreis und durch H und G die Linie HGD bis zum Durchschnitte D der Peripherie und nun lege man durch die Punkte H, K, D den Kreis HKD, so ist er der gesuchte.

Der Beweis führt sich aus der Figur und dem zur vorhergehenden Aufgabe Gesagten leicht.

Ist Fig. 549. ein Kreis DEG und in ihm zwei Punkte H und K gegeben, und man soll einen Kreis beschreiben, der durch die beiden Punkte geht und den Kreis in demselben Halbkreis, worin die Punkte liegen, berührt, so lege man durch einen der beiden Punkte H die Sehne AB willkührlich, ziehe KH und suche zu KH, AH und HB die vierte Proportionale KP, lege sie auf KH und fälle von P eine Tangente PG an den Kreis; durch den Berührungspunkt G und durch H ziehe man die Linie GHD, so ist D der gesuchte Berührungspunkt; nun lege man durch ihn und die Punkte K und H den Kreis DKH, so ist er der gesuchte.

Der Beweis führt sich leicht.

Auf eine ähnliche Art wird die Aufgabe gelöst, wenn die beiden Punkte innerhalb des Kreises gegeben sind und man einen Kreis beschreiben soll, welcher den gegebenen im entgegengesetzten Halbkreis berührt.

§. 480.

Aufgabe. Es sind zwei ungleiche Kreise und ausser ihnen ein Punkt gegeben. Man soll durch diesen Punkt einen Kreis ziehen, der die beiden Kreise ausschließungsweise berührt. Fig. 550.

Erörterung. Die Kreise seyen GBCH und EFKO, der gegebene Punkt sey D. Die Auflösung dieser Aufgabe beruht auf folgenden bekannten Sätzen: Wenn zwei ungleiche Kreise M und P von einem dritten DLO in den Punkten L und O berührt werden, und man durch die Berührungspunkte L und O und die Mittelpunkte M und P die Linien LA und GA zieht, so müssen sie sich in einem Punkte A ausserhalb der beiden Kreise durchschneiden. Zieht man von dem Punkte A auf den gegebenen Punkt D eine Linie AD, so wird sie den berührenden Kreis in dem Punkte R durchschneiden. Zwischen der Centrale GA und der Linie AD gilt nun folgende Gleichung

$$AK \cdot AG = AR \cdot AD$$

Der Punkt A kann beliebig angenommen oder besser durch eine Hülfslinie CA bestimmt werden. Ist nun der Punkt R bestimmt, so hat man vier Punkte des zu construirenden Kreises D, R, L und O, von denen zwei D und R bekannt sind. Der Kreis aber, der durch die Punkte D und R geht und einen der gegebenen Kreise berüht, muß auch den zweiten berühren, da, wie oben bemerkt wurde, die Punkte L, O und A in einer geraden Linie liegen. Demnach ist die Aufgabe auf folgende zurückgebracht: den Punkt R zu suchen und dann durch D und R einen Kreis zu legen, welcher einen der beiden gegebenen berührt.

Zieht man von A irgend eine beliebige Linie AC, so ist

$$AC \cdot AE = AL \cdot AO = AD \cdot AR$$

wodurch auch der Punkt R bestimmt werden kann.

Auflösung. Man ziehe die Centrale GA, den Radius MC und mit ihm parallel den Radius PF so, daß die Linie CF die Centrale A in einem Punkte A durchschneide. Nun ziehe man AD und mache

$$AR = \frac{AK \cdot AG}{AD}$$

so ist der Punkt R bestimmt. Durch D und R lege man nach §. 478. einen Kreis DRO, der einen von den gegebenen berührt, so ist es der gesuchte.

Zweite Auflösung.

Erörterung. Nimmt man die Aufgabe als gelöst an und zieht die Tangenten OT und LS von den gemeinschaftlichen Berührungspunkten O und L bis zu den Durchschnitten T und S der Linie AS, welche von A durch den gegebenen Punkt gelegt ist, und zieht man von T die Sekante TE zu dem Kreise OEU und SC zu GCLV, so hat man

$$OT^2 = TE \cdot UT = TD \cdot TR$$

und $$SL^2 = SC \cdot SV = SR \cdot SD$$

Nach den beiden ersten Gleichungen liegen daher die vier Punkte E, U, D, R in einem Kreise; nach den zweiten Gleichungen liegen auch die vier Punkte R, D, V, C in einem Kreis. Da in beiden Fällen zwei Punkte gemeinschaftlich sind, so folgt daraus, daß alle sechs Punkte in einem Kreise liegen und daß man also durch einen solchen Hülfskreis auch den Punkt R bestimmen kann.

Construction. Man ziehe irgend eine beliebige gerade Linie CE, die verlängert, die Centrale GA in dem Punkte A schneiden wird, beschreibe durch die Punkte D, C und E einen Kreis DVCEUR, der die Kreise M und P in den Punkten V und U durchschneidet, ziehe AD und dann CVS und EUT bis zu den Durchschnitten T und S mit AD und ihrer Verlängerung, ziehe ferner von T und S Tangenten TO und SL an die Kreise M und P, so sind L und O die gesuchten Berührungspunkte. Beschreibt man also durch D, L und O den Kreis DLO, so ist er der gesuchte.

Hat man einen Punkt O gefunden, so ergibt sich leicht der

andere Berührungspunkt L, wenn man von A durch O die Linie AOL zieht.

Ist der Punkt R gegeben, so bleibt die gegebene Auflösung im Wesentlichen dieselbe und die Punkte D und R wechseln ihre Stellen.

§. 481.

Aufgabe. Es sind zwei ungleiche Kreise und ausser ihnen ein Punkt gegeben. Man soll einen Kreis beschreiben, der durch den gegebenen Punkt geht und die beiden Kreise einschließungsweise berührt.

Auflösung. Fig. 551. Die beiden Kreise seyen GLF und KOB, der gegebene Punkt sey D. Man ziehe die gemeinschaftliche Centrale MPA und beliebig den Radius ML und mit ihm parallel den Radius PC, dann ziehe man LC bis zum Durchschnitte mit A und durch A und D die Linie AD unbestimmt und mache

$$AR = \frac{AG \cdot AO}{AD}$$

Nun beschreibe man nach §. 477. durch die Punkte D und R den Kreis DRLO, welcher einen von den beiden Kreisen einschließungsweise berührt, so berührt er auch den andern und ist der gesuchte Kreis.

Der Beweis ergibt sich mit einigen Abänderungen aus den Erörterungen der vorhergehenden Aufgabe.

Zweite Auflösung. Fig. 550. Man nehme irgend eine Linie CE beliebig an, die hinlänglich verlängert, die Centrale in A durchschneiden wird, beschreibe durch die Punkte D, C und E den Kreis CERD, der die Kreise M und P in V und U schneiden wird, ziehe von A durch D die Linie AS, dann die Linien CVS und EUT bis zum Durchschnitte mit AS und nun ziehe man von S und T an die gegebenen Kreise die äussern Tangenten SL′ und TO′ und beschreibe durch D und die beiden Berührungspunkte L′ und O′ den Kreis DL′O′, so ist er der gesuchte.

Ist ein Berührungspunkt O′ gefunden, so läßt sich der andere L′ leicht finden, wenn man durch A und O′ die Linie

AO'L' bis zum äussern Durchschnitte L' mit dem zweiten Kreise zieht.

§. 482.

Aufgabe. Es sind zwei ungleiche Kreise und ein Punkt ausser ihnen gegeben. Man soll einen Kreis beschreiben, der durch den Punkt geht und den einen Kreis einschließungsweise, den andern ausschließend berührt. Fig. 552.

Auflösung. Die beiden Kreise seyen P und M, der Punkt D. Man ziehe die Centrale PM bis zu den Durchschnitten E und Q ihrer Peripherie, dann ziehe man in dem einen Kreise P beliebig den Radius PF und im andern auf der entgegengesetzten Seite MO mit PF parallel, ziehe ferner FO und lege von D durch den Durchschnittspunkt K die Linie DK unbestimmt, mache nun

$$KH = \frac{FR \cdot KR}{DK}$$

wodurch der Punkt H bestimmt ist. Nun ziehe man durch die Punkte D und H einen Kreis, der den Kreis P einschließend berührt, so ist die Aufgabe gelöst.

Anmerkung. Es sind, wie leicht zu ersehen ist, zwei auflösende Kreise möglich.

Sind zwei gleiche Kreise und ausser ihnen ein Punkt gegeben, und man soll durch ihn einen Kreis ziehen, der die beiden gegebenen berührt, so wird man das leicht thun können, wenn man um den gegebenen Punkt einen Kreis mit dem gemeinschaftlichen Halbmesser und dann einen Hülfskreis beschreibt, der durch die Mittelpunkte der gegebenen geht und die Peripherie des Kreises berührt, und endlich durch ihn einen concentrischen bestimmt, der durch den gegebenen Punkt geht und die Kreise berührt.

§. 483.

Aufgabe. Es sind drei ungleiche Kreise gegeben. Man soll einen vierten beschreiben, der sie ausschließungsweise berührt. Fig. 553.

Auflösung. Die gegebenen Kreise seyen DEF, ABC und GHK. Man nehme den Halbmesser des kleinsten Kreises

GHK und suche zu ihm die Unterschiede rd und Qa der beiden andern Halbmesser so, daß rd = rD — GM, Qa = AQ — GM ist, bilde mit diesen Halbmessern die concentrischen Kreise edf und abc und beschreibe nach §. 480. einen Kreis Mda, der durch den Mittelpunkt des kleinsten geht und die beiden concentrischen berührt, so ist der Mittelpunkt K des gefundenen Kreises der des gesuchten. Verkleinert man seinen Radius KM um den Radius des kleinsten Kreises GM und beschreibt mit KG einen Kreis ADG, so wird dieser die drei gegebenen Kreise berühren, denn es ist KA = KD = KG und KAQ, KGM, KDr sind gerade Linien und Centralen.

Anmerkung. Soll zu drei ungleichen Kreisen ein vierter gesucht werden, der alle drei einschließungsweise berührt, so wird sich hiernach die Construction durch einen Hülfskreis, der durch des kleinsten Kreises Centrum geht und die beiden Unterschiedskreise von aussen berührt, leicht finden lassen.

Ebenso lassen sich auf ähnliche Weise die Aufgaben lösen, wenn zu drei ungleichen Kreisen ein vierter Kreis gesucht wird, der einen oder zwei ausschließungsweise und zwei und einen einschließungsweise berühren soll.

§. 484.

Aufgabe. Es ist ein Kreis gegeben. Man soll in ihn drei gleiche Kreise beschreiben, die sich und ihn berühren. Fig. 554.

Auflösung. Der Kreis sey ABC. Man theile seine Peripherie in drei gleiche Theile AB, BC und CA §. 430. und errichte auf den Punkten A, B und C Tangenten, so werden diese sich in den Punkten F, G und H durchschneiden und das gleichseitige Dreieck FGH bilden. Nun ziehe man von den Berührungspunkten A, B, C zu den Winkelspitzen H, G, F die Linien AH, BG, FC, so entstehen drei congruente Dreiecke FMH, FMG und GMH, die durch des gegebenen Kreises Mittelpunkt gehen. Beschreibt man nun in jedes einen Kreis, so entstehen die Kreise Apq, Bqr, Crp, die den gegebenen Kreis in A, B, C und sich selbst in p, q, r berühren, also den Bedingungen der Aufgabe genügen.

Achtes Kapitel.

Aufgaben über größte und kleinste Werthe.

§. 485.

Aufgabe. Es ist eine Linie und es sind zwei ausser ihr auf einer Seite gelegene Punkte gegeben. Man soll in der Linie einen Punkt bestimmen, von dem aus die zwei, auf die gegebenen Punkte gezogenen Linien, eine Summe erzeugen, die ein Kleinstes wird. Fig. 555.

Auflösung. Die gegebene Linie sey AB, die Punkte C und D. Man fälle von dem einem Punkte C eine senkrechte Linie CE auf die gegebene Linie, verlängere sie, daß EF = EC wird und ziehe von dem andern Punkte C auf den Punkt F eine gerade Linie, so ist der Punkt G, worin diese Linie die gegebene AB durchschneidet, der gesuchte Punkt und die Summe der beiden Linien CG + GD wird ein Kleinstes seyn.

Beweis. Die Linie EF = EC, EG = EG. Die Linie FC ist auf die Linie AB senkrecht gezogen, also sind die beiden Winkel bei E über der Linie FC Rechte und einander gleich, demnach auch die Dreiecke EFG und EGC congruent, folglich sind die Linien FG und GC einander und die Linie FD ist der Summe der beiden gesuchten Linien gleich, denn es ist FD = FG + GD = CG + GD

Die eben gemachten Bemerkungen von der Congruenz der Dreiecke EFG und EGC gelten von allen Dreiecken, die auf den Linien EF und EC aufstehen und eine gemeinschaftliche Spitze in der Linie AB haben; es sind daher die von jedem andern Punkte G′, G″ . . . in der Linie AB auf die Punkte F und D gezogenen Linien der Summe der von ihm auf C und D gezogenen Linien gleich, und es ist daher

$$FG' + G'D = CG' + G'D$$
$$FG'' + G''D = CG'' + G''D$$
u. s. w.

Alle diese Summen aber bilden mit der Linie FD Dreiecke. Dieß ist aber nicht möglich, ohne daß sie selbst größer sind, als die Linie FD, oder als die ihr gleiche Summe der beiden Linien CG und GD, und es ist daher

$$CG' + G'D > CG + GD$$
$$CG'' + G''D > CG + GD$$
u. s. w.

Diese Bemerkungen gelten von jedem in der Linie AB gedenkbaren Punkte. Hieraus folgt also der Schluß: daß die Linien CG und GD die kleinste unter allen, zwischen den Punkten C und D und einem dritten in der Linie AB gedenkbaren Punkte, möglichen Summen bilden.

Anmerkung. Aus der Congruenz der Dreiecke EFG und ECG folgt die Gleichheit der Winkel x und z. Die Winkel z und x′ sind Scheitelwinkel, also auch einander gleich; dieß führt zu dem Schluß: daß auch die Winkel x und x′, welche durch die von dem gesuchten Punkte G auf die gegebenen Punkte C und D gezogenen Linien entstehen, einander gleich sind. Hieran schließt sich die Bemerkung, daß zwei Linien, welche von zwei gegebenen Punkten auf einer Linie EB gezogen werden und die kleinste Summe bilden, zugleich mit dieser Linie gleiche Winkel bilden müssen.

§. 486.

Aufgabe. Es ist von drei Linien, welche in einer stetigen geometrischen Proportion stehen, die Sum-

me der beiden äussern Linien gegeben. Man soll die größere und mittlere so bestimmen, daß ihre Summe ein Größtes werde. Fig. 556.

Auflösung. Die gegebene Summe sey AB. Man beschreibe über dieser Linie, als Diameter, einen Halbkreis ADB, trage in ihrem Mittelpunkte C den Winkel DCP $= \frac{1}{2}$ R an und verlängere seinen Schenkel bis zum Durchschnitte D mit der Peripherie und fälle von dem Punkte D auf AB die senkrechte Linie ED, so hat man die stetige Proportion

$$AE : ED = ED : EB$$

und in ihr ist die Summe von AE und ED ein Größtes.

Beweis. Man stelle in dem Endpunkte D die Linie PDF senkrecht auf, errichte in A die Linie AF senkrecht bis zum Durchschnitte F mit PF, verlängere AB bis zum Durchschnitte mit P, so zeigt es sich, da der Winkel bei D ein Rechter und der bei C der Hälfte eines Rechten ist, daß das Dreieck CDP ein rechtwinklinges gleichschenkliges Dreieck ist und daß also der Winkel bei P $= \frac{1}{2}$ R, ferner: daß wegen des rechten Winkels bei E und A auch die Dreiecke PED und PAF gleichschenklige rechtwinklige Dreiecke sind, und daß also

$$AF = AP \text{ und } ED = EP \text{ ist}$$

Berücksichtigt man nun, daß von beliebig vielen Punkten D, D′, D″ . . . des Halbkreises senkrechte Linien auf die Summe AB gezogen werden können, welche zu den beiden erzeugten Abschnitten die mittlere geometrische Proportionale bilden und daß allemal durch diese Punkte ein Dreieck entstehet, dessen Katheten die Summe des größern Abschnittes und der mittlern Proportionale sind; so hat man

$$AE + ED = AE + EP = AP$$
$$AE' + E'D' = AE' + E'P' = AP'$$
$$AE'' + E''D'' = AE'' + E''P = AP'$$

u. s. w.

Zieht man nun durch verschiedene Punkte D′ und D″ des Halbkreises die Linie F′P′, so bemerkt man leicht, daß das Darstellen der drei Proportional-Linien nur so lange möglich ist, als die Linie FP die Kreislinie durchschneidet oder berührt,

daß es unmöglich wird, wenn die Hypotenuse FP über die Kreislinie hinaus fällt. Von dieser Linie FP hängt zugleich die Größe der Linie AP ab. Sie wird daher ein Größtes seyn, wenn die Linie FP den Halbkreis in D berührt, denn alle Hypotenusen F'P', die innerhalb der Hypotenuse FP fallen, werden kleinere Summen erzeugen und daher wird der oben angegebene Fall ein Größtes erzeugen. Es ist daher

$$AE' + E'D = AP' < AE + ED = AP$$

und $$AE'' + E''D'' = AP' < AE + ED = AP$$

Das, was hier für den Quadranten HCB bewiesen wurde, gilt auch von dem Quadrant ACH und ist daher allgemein.

§. 487.

Aufgabe. Es ist von drei Linien, welche in einer stetigen geometrischen Proportion stehen, die Summe der beiden äussern gegeben. Man soll die größere und mittlere so bestimmen, daß ihre Summe ein Kleinstes sey. Fig. 556.

Auflösung. Die gegebene Summe sey AB. Man beschreibe über der Linie AB einen Halbkreis und errichte in dem Mittelpunkte C die senkrechte Linie CH bis zum Durchschnitte H der Peripherie, so hat man folgende Proportion

$$AC : CH = CH : CB$$

und die Summe der beiden Linien AC und CH wird ein Kleinstes seyn.

Der Beweis führt sich aus dem zur vorigen Aufgabe Gesagten leicht, denn die Summe des größern Abschnittes und der mittleren Proportionale kann nie kleiner, als der Durchmesser AB werden, und es sind alle Summen, welche durch den größern Abschnitt und die mittlere Proportionale erzeugt werden, größer als der Durchmesser; folglich ist die Summe der genannten Linien ein Kleinstes.

§. 488.

§. 488.

Aufgabe. Es ist eine Linie und ein Winkel gegeben. Man soll über die genannte Linie den gegebenen Winkel so antragen, daß die Summe der beiden Schenkel ein Größtes werde. Fig. 557.

Auflösung. Die Linie sey AB, der Winkel x. Man beschreibe über der Linie AB einen Kreisbogen ACB, welcher den gegebenen Winkel x faßt, halbire den Bogen ACB und ziehe von dem Halbirungspunkte C die Linie CA und CB auf die Endpunkte der gegebenen Linie, so ist die Summe dieser beiden Schenkel ein Größtes.

Beweis. Man ziehe von dem Halbirunrspunkte C mit dem Radius CB den Kreis AEB. Nach der Construction ist die Linie CB = AC, da sie Sehnen sind, welche zwei gleichen Kreisbögen AC und CB einem und demselben Kreise zugehören. Das Dreieck ACB ist also gleichschenklig.

Nun verlängere man die Linie BC bis zum Durchschnitte E, so ist BC = EC, da diese Linien Radien des Kreisrs AEB sind. Da aber AC = CB ist, so ist auch AC = EC und folglich ist auch das Dreieck AEC ein gleichschenkliges. Hieraus fließt, daß

$$AC + CB = EC + CB = EB$$

d. h. daß die Summe der beiden Schenkel der Linie EB gleich ist. Aus der Construction der beiden Kreise AEB und ACB ist ersichtlich, daß der Winkel bei C ein Centriwinkel ist und der bei E ein Peripheriewinkel in einem und demselben Kreise AEB. Alle Winkel in dem Kreise ACB über der Linie AB sind dem Centriwinkel bei C gleich, eben so sind alle Winkel in dem Kreise AEB über der Linie AB dem Peripheriewinkel gleich, und der Peripheriewinkel ist die Hälfte des Centriwinkels, wenn beide mit einander auf gleicher Sehne aufstehen. Dieß führt zu dem Schlusse: daß jeder Winkel, der über der Linie AB und in der Kreislinie ACB liegt, doppelt so groß ist, als der Peripheriewinkel des Kreises AEB. Zieht man nun durch irgend einen andern Punkt C′ des Bogens ACB

eine Linie BC′E′ und verbindet die Punkte E′ und A durch die Punkte E′A, so entstehet das Dreieck AE′C′, worin der Winkel

$$ACB = C'E'A + E'AC'$$

ist. Da aber $C'E'A = \frac{1}{2} ACB$ ist, so ist auch

$$E'AC = ACB - \frac{1}{2} ACB = \frac{1}{2} ACB$$

und hieraus folgt, daß das Dreieck AE′C′ ein gleichschenkliges ist, und daß also

$$AC' + C'B = E'C' + C'B' = E'B \text{ ist.}$$

Die Linie BE ist, da sie durch den Mittelpunkt C geht, der Durchmesser in dem Kreise AEB, und also größer, als jede andere Linie, welche von B aus auf irgend einen andern Punkt in der Peripherie desselben Kreises geht, also ist

$$EB > E'B$$

Da nun diese Linien die Schenkel-Summen der gleichen Winkel über der Linie AB bezeichnen, so ist auch

$$AC + CB > AC' + C'B$$

Die so eben gemachten Bemerkungen gelten von jedem Schenkel-Paare eines Winkels über der Linie AB, dessen Spitze in die Peripherie fällt. Hieraus fließt also allgemein daß die Schenkel-Summe des Winkels ACB unter allen Schenkel-Summen die größte ist, und daß also die angegebene Construction den Forderungen der Aufgabe genügt.

Anmerkung. Die so eben gemachten Bemerkungen führen zu folgenden allgemeinen Behauptungen. Fig. 557.

Wenn der zu einer Sehne AB gehörige Bogen halbirt und von seinem Halbirungspunkte C mit der, dem halben Bogen CB oder AC zugehörigen Sehne CB ein Kreis ACB beschrieben wird, so ist

1) der Peripheriewinkel im innern Kreise doppelt so groß, als der Peripheriewinkel im äussern Kreise;
2) so sind die von einem Endpunkte der Sehne AB gezogenen Sehnen im äussern Kreise den Schenkel-Summen der ihnen im innern Kreise zugehörigen Peripheriewinkel gleich.

Werden umgekehrt die Schenkel der, über einer Sehne gebildeten, Peripheriewinkel in gerader Richtung von einem Endpunkte der Sehne aus verlängert, so daß jede Verlängerung dem andern Schenkel entspricht, so bilden die Endpunkte dieser Schenkelsumme eine Kreislinie, deren Mittelpunkt im Halbirungspunkte des gegebenen Kreisbogens liegt.

Wird verlangt, daß über einer geraden Linie ein Winkel so gebildet werden soll, daß dessen Schenkelsumme ein Kleinstes sey, so wird eine Unmöglichkeit gefordert; da sich die Schenkelsumme immer verkleinern läßt und sich der gegebenen Linie nähert.

Zusatz. Ist die Hypotenuse gegeben und wird verlangt, daß über ihr ein rechtwinkliges Dreieck gebildet werden soll, worin die Summe der beiden Katheten ein Größtes sey, so wird die Aufgabe dadurch gelöset, daß man über die gegebene Hypotenuse einen Halbkreis beschreibt und auf gleiche Weise verfährt. Das gesuchte rechtwinklige Dreieck wird ein gleichschenkliges seyn.

§. 489.

Aufgabe. Es ist ein Winkel und die Summe seiner Schenkel gegeben. Man soll die beiden Schenkel so bestimmen, daß die zwischen ihren Endpunkten gezogene Linie ein Kleinstes sey. Fig. 558.

Auflösung. Der gegebene Winkel sey x, die Summe seiner Schenkel sey BD. Man halbire die gegebene Summe und trage auf jeden Schenkel des Winkels $x = BAC$ die Hälfte der gegebenen Summe $BA = AC = \frac{1}{2}BD$ und verbinde die Endpunkte B und C der beiden Schenkel, so ist die Linie BC die kleinste Linie, die unter den gegebenen Bedingungen zwischen den Endpunkten aller möglichen Schenkel-Veränderungen möglich ist.

Beweis. Man verlängere den einen Schenkel BA um die Hälfte der gegebenen Summe, so daß $AD = \frac{1}{2}BD$ und also $BA = AC = AD$ ist, und ziehe durch die Punkte D und C die Linie DCE. Hierdurch hat man die Dreiecke ABC und ACD erhalten, welche beide gleichschenklig sind, es ist also der Winkel $y = y'$ und der Winkel $CBA = v$; ferner ist der Winkel $x = y + y', = 2y'$, also $\frac{1}{2}x = y'$. Aus dem nämlichen Grunde ist der Winkel $\frac{1}{2}z = v$.

Da nun die Winkel über einer geraden Linie zusammen zwei Rechte betragen, so ist $x + z = 2R$

oder $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z = R$

Da man aber y' statt $\frac{1}{2}$x und v statt $\frac{1}{2}$z setzen kann, so ist auch

$$v + y' = R = BCD$$

d. h. der Winkel, den die Linie BC mit CD macht, ist ein Rechter, und demnach ist die Linie BC der senkrechte Abstand des Punktes B von der Linie CD. Nun ist bekannt, daß der senkrechte Abstand eines Punktes von einer Linie die kleinste unter allen Linien ist, welche von ihm auf jene gezogen werden können, also ist auch $BC < BC'$

Zieht man nun von irgend einem andern Punkte C in der Linie ED unter dem Winkel $y'' = \frac{1}{2}x = y'$ eine Linie CA, so entsteht ein gleichschenkliges Dreieck C'A'D und es ist die Linie $C'A' = A'D$, also auch

$$BA' + A'C' = BA' + A'D = BD$$

folglich auch der Winkel $BA'C' = y + y'' = x$. Dieß führt zu dem Schlusse: der Winkel BA'C' ist dem gegebenen gleich und hat mit ihm gleiche Schenkelsumme, unterscheidet sich aber von ihm dadurch, daß die Linie, die ihm gegenübersteht, größer ist, als diejenige, welche dem Winkel BAC gegenüber steht.

Da die nämlichen Schlüsse sich auf jeden beliebigen Punkt in der Linie DE anwenden lassen, so geht hieraus hervor, daß die Linie BC die kleinste Linie ist, die in allen möglichen Fällen unter den obigen Bedingungen zwischen den Endpunkten B und C der beiden Schenkeln gezogen werden kann.

Anmerkung. Ein Größtes gibt es nicht, weil die Linie BC der Schenkelsumme selbst gleich werden müßte, wodurch eine Unmöglichkeit gefordert würde, da kein Winkel von einer geraden Linie umschlossen werden kann.

Zieht man von B aus mit der gegebenen Schenkelsumme BD einen Kreisbogen EFD, so wird die Linie ED, die unter dem Winkel $y = \frac{1}{2}x$ in D angetragen ist, die Sehne dieses Kreisbogens, und die Linie BC halbirt die Sehne ED in dem Punkte C und den Bogen EFD, wenn sie verlängert wird. Dieß erhellt daraus, daß BC auf ED senkrecht aufsteht.

Der Winkel EBD ist dem Ergänzungswinkel z zu zweien Rechten gleich, denn das Dreieck BED, das entsteht, wenn die Linie EB gezogen ist, ist gleichschenklig, es ist alsdann der Winkel $y = y''$ und also der Winkel

$$EBD = 2R - 2y = 2R - x = z$$

Der Bogen DFE wird desto größer, je kleiner der Winkel x wird. Ist der gegebene Winkel ein Rechter, so verändert dieß die Gültigkeit obiger Schlüsse nicht und hieraus folgt also, daß bei gleicher Katheten-Summe unter allen rechtwinkligen Dreiecken das gleichschenklige die kleinste Hypotenuse hat.

§. 490.

Aufgabe. Es ist ein Kreis und ein Punkt innerhalb seiner Peripherie gegeben. Man soll durch ihn die größt mögliche Sehne ziehen Fig. 559.

Auflösung. Der gegebene Kreis sey BAC, der Punkt D. Man ziehe durch den gegebenen Punkt D und den Mittelpunkt M des gegebenen Kreises eine Linie BC bis zum Durchschnitte der Peripherie auf beiden Seiten des Mittelpunktes, so ist die Linie BC die gesuchte Sehne.

Beweis. Man ziehe die beliebige Linie AE durch den gegebenen Punkt, aber nicht durch den Mittelpunkt, bis zu den Durchschnitten A und E der Peripherie auf beiden Seiten des Punktes, verbinde den Mittelpunkt M mit den beiden Endpunkten der Linie A und E durch die Radien ME und MA, so ist, da MC = MB = MA = ME ist, die Summe der beiden Linien MA und ME dem Durchmesser BC gleich. Die beiden Radien MA und ME bilden mit der Sehne AE ein Dreieck. Da nun hie Summe zweier Seiten eines Dreiecks immer größer ist, als die dritte, so ist also

$$MA + ME > AE$$

oder

$$BM + MC > AE$$

also

$$BC > AE$$

Die hier gemachten Schlüsse gelten von jeder Linie, welche durch den gegebenen Punkt, als Sehne, in den Kreis gelegt wird. Hieraus folgt also, daß die Linie, welche durch den Punkt D und den Mittelpunkt geht, größer ist, als jede, durch den gegebenen Punkt als Sehne gelegte, Linie.

§. 491.

Aufgabe. Es ist ein Kreis und innerhalb seiner

Peripherie ein Punkt gegeben. Man soll durch den gegebenen Punkt die kleinste Sehne ziehen. Fig. 560.

Auflösung. Der Kreis sey ABEC, der Punkt D. Man ziehe durch den gegebenen Punkt D den Durchmesser BC und errichte auf ihm im Punkte D eine senkrechte Linie, verlängere sie bis zu den Durchschnitten A und E der Peripherie auf beiden Seiten des gegebenen Punktes, so ist AE die gesuchte Sehne.

Beweis. Man ziehe durch den gegebenen Punkt D in beliebiger Neigung gegen die Sehne EA, aber nicht durch den Mittelpunkt, die Sehne FG, fälle auf sie von dem Mittelpunkte M die Linie MH senkrecht, so entsteht das rechtwinklige Dreieck DHM, worin der senkrechte Abstand DM des gegebenen Punkts D, oder der Sehne EA, vom Mittelpunkte die Hypotenuse, und der senkrechte Abstand der Sehne FG von M die eine Kathete bildet. Da nun die Kathete immer kleiner ist, als die Hypotenuse, so ist $DM > MH$
Nun ist bekannt, daß jede Sehne, welche dem Mittelpunkte näher liegt, als eine andere, auch größer ist, als die, welche entfernter von ihm liegt. Hieraus folgt, daß

$$EA < FG$$

ist. Die bei der Vergleichung der, durch den gemeinschaftlichen Punkt D gezogenen, Sehnen AE und FG gemachten Schlüsse, lassen sich auf jedes andere Paar ausdehnen und sind allgemein, es zeigt sich also, daß jede andere Sehne dem Mittelpunkte näher liegen und also auch größer seyn müsse, als EA.

Da alle durch D möglichen Sehnen größer als die Sehne EA sind, so muß sie unter ihnen die Kleinste seyn.

Anmerkung. Der Beweis der obigen Aufgabe beruht auf der Behauptung: daß immer ein rechtwinkliges Dreieck entstehen müsse, wenn in irgend einer beliebigen Neigung gegeu AE eine andere Sehne durch den Punkt D gezogen und auf diese eine Senkrechte vom Mittelpunkte gezogen wird. Die Wahrheit dieser Behauptung geht daraus hervor, daß durch die gezogene zweite Sehne FG immer ein Winkel, wenn auch noch so klein, entstehen müsse. Da aber die Sehne EA mit dem Diameter einen rechten Winkel

bildet, so muß auch die zweite Sehne mit dem Diameter einen Winkel bilden, welcher kleiner als ein Rechter ist, und also ein rechtwinkliges Dreieck MDH möglich seyn.

§. 492.

Aufgabe. Es ist innerhalb eines Kreises der Durchmesser gezogen. Man soll auf ihm eine senkrechte Linie errichten, welche die größte unter allen möglichen Senkrechten ist. Fig. 561.

Auflösung. Der gegebene Kreis sey ADCE, der Durchmesser DE. Man errichte in dem Mittelpunkte M die senkrechte Linie KC bis zum Durchschnittspunkte C der Peripherie, so ist MC die gesuchte Linie.

Beweis. Man verlängere die senkrechte Linie CM bis zum Durchschnitte B auf der entgegengesetzten Seite der Peripherie, und errichte in irgend einem andern Punkte M' des Durchmessers die Sehne B'C' senkrecht, so ist die Sehne BC, da sie durch den Mittelpunkt M des Kreises geht, ein Durchmesser und in M halbirt. Die Sehne B'C' ist, da sie auf dem Durchmesser DE senkrecht aufsteht, in M auch halbirt und also $MC = \frac{1}{2}BC$, $M'C' = \frac{1}{2}B'C'$. Nun ist aus §. 490. bekannt, daß der Durchmesser größer ist als jede Linie im Kreise, die nicht durch den Mittelpunkt geht, also ist

$$BC > B'C'$$

Dieser Schluß läßt sich auch auf die Hälften dieser Linien ausdehnen, also ist auch $\frac{1}{2}BC > \frac{1}{2}B'C'$

oder $$MC > M'C'$$

Die Schlüsse, die hier auf die senkrechte Linie M'C' angewendet wurden, lassen sich leicht auf jede andere Linie, welche senkrecht auf dem Durchmesser, aber nicht im Mittelpunkte, aufsteht, anwenden. Dieß führt zu dem allgemeinen Schlusse, daß unter allen Linien, welche auf dem Diameter eines Kreises senkrecht aufstehen und sich bis an die Peripherie erstrecken, diejenige, welche vom Mittelpunkt ausgeht, oder der Radius, die größte ist.

Anmerkung. 1) Alle diese Schlüsse bleiben noch in voller Kraft, wenn statt eines Kreises, nur ein Kreisbogen, oder ein Halbkreis und die dazu gehörige Sehne gegeben ist und verlangt wird, daß zwischen Sehne und Kreisbogen eine Linie senkrecht auf jener errichtet wird, welche die größt möglichste ist.

2) Die obigen Schlüsse lassen sich nicht auf den Fall ausdehnen, wenn auf einem Durchmesser, oder auf der Sehne eines Kreisbogens Linien unter bestimmten und gleichen Winkeln, oder unter sich parallel gezogen werden.

§. 493.

Aufgabe. Es ist die Seite eines Dreiecks und der gegenüberstehende spitze Winkel gegeben. Man soll daraus ein stumpfwinkliges Dreieck so bilden, daß der Abstand des Auffallspunktes der von dem spitzen Winkel auf die Verlängerung der gegebenen Seite gefällten Höhe, von dem einen Endpunkte der gegebenen Seite ein Größtes sey. Fig. 562.

Auflösung. Die gegebene Linie sey AB, der ihr gegenüberstehende Winkel x. Man beschreibe über der Linie AB einen Kreisbogen ACB, welcher den gegebenen Winkel faßt, lege durch den Mittelpunkt M des Kreisbogens ACB die Linie MC parallel mit AB bis zum Durchschnitte C mit der Peripherie und fälle von C aus eine senkrechte Linie CD auf die verlängerte Linie AB, so ist der Abstand des Punktes D von dem Punkte B ein Größtes.

Beweis. Man ziehe von M die Linie ME senkrecht auf AB und errichte in den Punkten B und A die Linie BG und AH senkrecht.

Alle Peripheriewinkel über der Linie AB sind dem gegebenen Winkel x gleich. Die Peripheriewinkel, die von irgend einem Punkte des Bogens HG über der Linie AB gebildet werden, erzeugen zwei spitze Winkel an den Punkten A und B,

denn die beiden Schenkel convergiren und liegen zwischen den Parallelen AH und BG, sind also kleiner als zwei Rechte und jeder einzelne auch kleiner als ein Rechter. Hieraus folgt, daß die Auflösung der vorgelegten Aufgabe nur dann möglich ist, wenn die Spitze des gegebenen Winkels in einen Punkte des Bogens GCB fällt, denn alsdann ist der Winkel ABC größer, als ABG = R, demnach größer, als ein Rechter.

Von allen Linien, die auf EK senkrecht stehen und bis an beliebige Punkte in der Peripherie des Bogens BCG gezogen werden können, ist diejenige die Größte, welche von dem Mittelpunkte M aus gezogen wird, und es ist also MC > M'C' u. s. w. Da nun die Linien MC und ED, ME und CD parallel gehen, so ist MC = ED; also ist die Linie ED die größt möglichste Linie, welche unter den obigen Bedingungen gezogen werden kann, und alle andere stumpfwinklige Dreiecke über der Linie AB werden kleinere Höhen-Abstände von dem Endpunkte B der Linie haben. Die obige Auflösung entspricht daher den Bedingungen der Aufgabe und der Abstand D' des Auffallspunktes der Höhe in dem Dreiecke AC'B, oder im Dreiecke AC''B, wird kleiner als der gegebene seyn.

Anmerkung. Es ist klar, daß auf der entgegengesetzten Seite der Linie AB ein zweites Dreieck möglich ist, das den Bedingungen der Aufgabe genügt, sich aber von dem eben gefundenen nur der Lage nach unterscheidet.

Die größte Länge, bis zu welcher der Abstand des Auffallspunktes der Höhe CD von dem Endpunkte B der Linie AB wachsen kann, läßt sich leicht bestimmen. Sie hängt von der Linie EB und dem Radius des Kreises, wozu der Kreisbogen ACB gehört, ab und ist dem Unterschiede zwischen dem Radius und der halben Linie AB gleich. Es ist also

$$BD = ED - EB = MC - EB$$
$$= MC - \tfrac{1}{2}AB$$

§. 494.

Aufgabe. Es ist der Unterschied der Abschnitte der Grundlinie und der Unterschied der zwei, an der Grundlinie liegenden, Winkel gegeben. Man soll

daraus ein Dreieck bilden, worin die Abschnitte den gegebenen Unterschied haben und die Grundlinie ein Größtes sey. Fig. 563.

Auflösung. Der Unterschied der Abschnitte sey BE, der Unterschiend zwischen den Winkeln, welche an der Grundlinie liegen, sey x. Man beschreibe über der gegebenen Unterschiedslinie BE einen Kreisbogen BAE, welcher den gegebenen Winkel faßt, verlängere unbestimmt den Unterschied BE und ziehe durch den Mittelpunkt M des Kreises, wozu der Kreisbogen BAE gehört mit BE den Radius MA parallel, ziehe die Linien AB und AE von A auf die Endpunkte des gegebenen Unterschiedes und mache die Linie AC = AE, so ist BAC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Man fälle von dem Punkte A die Linie AD senkrecht auf BC, so steht diese Linie, da das Dreieck EAC wegen der Linien EA und AE ein gleichschenkliges ist, auf der Grundlinie senkrecht auf und halbirt sie; und es ist also ED = DC. Geht man nun von dem Dreiecke EAC auf das Dreieck BAC über, so ist in diesem die Linie AD die Höhe, BD und DC aber sind die Abschnitte der Grundlinie und der eine Abschnitt BD ist um den gegebenen Unterschied BE größer, als der andere BC.

In dem gleichschenkligen Dreiecke sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich. Es ist also

$$AEC = ECA$$

ferner ist der Winkel an der verlängerten Grundlinie den beiden im Dreiecke gegenüberstehenden gleich, also ist

$$AEC = ABE + BAE$$

oder

$$BCA = ABE + BAE$$

Nun ist nach der Constrnction der Winkel x dem Winkel BAE gleich, führt man diesen Werth ein, so entsteht

$$x = EAB = BCA - ABC$$

Das Dreieck BAC hat also eine Grundlinie, deren Abschnitte um den gegebenen Unterschied BE von einander verschieden sind und zwei Winkel an ihr, die den gegebenen Unterschied haben.

Nun ist noch zu zeigen, daß unter allen, diesen Bedingungen genügenden, Dreiecken BAC die größt mögliche Grundlinie habe. Man errichte in dem Punkte E eine senkrechte Linie EG bis zum Durchschnitte G des Kreisbogens BAE, so genügen alle Dreiecke, deren Winkelspitze in den Bogen EAA'G fällt, den eben genannten Bedingungen. Bildet man nun ein anderes Dreieck BA'C' und fällt man von A' auf BC die Linie A'D' und auf EG die Linie A'P senkrecht, so geht PA' mit ED' und GE mit A'D' parallel, und es ist also auch PA' = ED'. Da nun die Linie EC' das Doppelte von ED', und EC das Doppelte von ED ist, so geht deutlich hervor, daß die Größe der Grundlinie von der Annahme des Punktes A in dem Bogen EAG abhängt, oder von dem senkrechten Abstande PA' dieses Punktes von der Sehne EG. Da nun die Mitte A des Bogens EAG den größten Abstand QA unter allen, zwischen ihm und seiner Sehne möglichen senkrechten, Linien hat, so ist auch die Grundlinie des Dreiecks BAC, dessen Höhe von der Mitte des Bogens EAG auf die verlängerte Grundlinie gefällt ist, unter den Grundlinien aller möglichen Dreiecke die größte und das Dreieck BAC enthält den gegebenen Unterschied zwischen den Abschnitten der Grundlinie und den ihr anliegenden Winkeln und genügt den Bedingungen der Aufagbe.

§. 495.

Aufgabe. Es ist eine Linie und der ihr gegenüberstehende Winkel gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden, worin die Linie, welche von der Spitze des Winkels auf den Mittelpunkt der gegebenen Seite geht, ein Größtes sey. Fig. 564.

Auflösung. Die gegebene Linie sey AB, der gegenüberstehende Winkel x. Man beschreibe über der Linie AB einen Kreisbogen ACB, welcher den gegebenen Winkel faßt, und ziehe von dem Mittelpunkte E der Linie AB durch den Mittelpunkt des Kreises, wozu der Kreisbogen ACB gehört, eine gerade Linie bis zum Durchschnitte C der Peripherie, ziehe von C die Linie CA und CB, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Man ziehe von irgend einem Punkte C' in der Kreislinie ACB die Linien C'A und C'B und die Halbirungslinie C'E, so gehen die beiden, den Dreiecken ACB und AC'B zugehörigen Halbirungslinien EC und EC' von dem gemeinschaftlichen Mittelpunkte der Linie AB aus und die Linie EC geht durch den Mittelpunkt M des Kreises ACB, die Linie EC nicht. Da nun unter allen Linien, welche von irgend einem beliebigen Punkte E in einer Kreisfläche auf die Kreislinie gezogen werden, diejenige die größte ist, welche durch den Mittelpunkt M des Kreises geht; so ist die Linie EC unter allen, von dem Punkte E aus auf die Peripherie gezogenen, Linien die größte. Alle diese Linien sind zugleich Halbirungslinien der ihnen zugehörigen Dreiecke, wie sich dieß an den Dreiecken ACB und AC'B zeigt, also entspricht die obige Auflösung den Anforderungen der Aufgabe.

Anmerkung. Auf gleiche Art löst sich auch die Aufgabe, wenn eine Seite und der ihr gegenüberstehende Winkel gegeben ist und die Bildung eines Dreiecks verlangt wird, dessen Höhe ein Größtes ist.

Der Beweis führt sich leicht. Es sey Fig. 564. das gesuchte Dreieck ACB, so ist CE seine Höhe, nun bilde man von irgend einem andern Punkte C' der Peripherie ACB aus das Dreieck AC'E dessen Höhe die Linie C'B ist, und ziehe die der Linie AB zugehörige Halbirungslinie C'E, so ist die Linie EC' die Hypotenuse in dem Dreiecke EC'B, also größer als C'B. Da nun vorhin bewiesen wurde, daß EC größer als EC' ist, so ist auch

$$EC > EC' > C'B$$

und demnach entspricht das Dreieck ACB den Bedingungen der Aufgabe.

§. 496.

Aufgabe. Es ist die Grundlinie eines Dreiecks und die ihr zugehörige Höhe gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden, worin die Summe der beiden andern Seiten ein Kleinstes ist. Fig. 565.

Auflösung. Die gegebene Grundlinie sey BC, die Höhe AD. Man halbire die Seite BC und errichte in

ihrem Mittelpunkte D die Höhe DA senkrecht und verbinde ihren Endpunkt A mit den beiden Endpunkten B und C der Linie BC, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Man ziehe durch den Punkt A mit der Grundlinie BC eine Linie GK parallel, so lassen sich zwischen diesen beiden Parallelen unzählige Dreiecke denken, welche die gegebene Höhe und Grundlinie gemeinschaftlich, aber verschiedene Seiten-Summen haben. Die Beweisführung besteht daher darin, daß gezeigt werde, daß unter allen möglichen Dreiecken das Dreieck BAC die kleinste Seitensumme habe. Es wird genügen, wenn statt aller möglichen Dreiecke zwei, ABC und A'BC, herausgehoben und mit einander verglichen werden, indem sich sodann die vorgetragenen Schlüsse leicht auf jedes andere Paar ausdehnen und so ins Allgemeine übertragen lassen.

Die beiden Dreiecke ABC und A'BC werden durch ihre Höhe AD und A'D' in zwei rechtwinklige Dreiecke ABD und ADC, A'BD' und A'D'C zerlegt. Hieraus fließen nach dem pythagoräischen Lehrsatze folgende Gleichungen

$$1)\quad AB^2 = BD^2 + AD^2$$

$$2)\quad AC^2 = DC^2 + AD^2$$

$$3)\quad AB'^2 = BD'^2 + A'D'^2$$

$$4)\quad A'C^2 = D'C^2 + A'D'^2$$

Da aber AD = A'D' ist, so ergibt sich aus der Vereinigung von 1 und 2 folgende

$$AB^2 + AC^2 = 2\,AD^2 + BD^2 + DC^2$$

von 3 und 4 $$A'B^2 + A'C^2 = 2\,AD^2 + BD'^2 + D'C^2$$

oder $$5)\quad AB^2 + AC^2 - 2\,AD^2 = BD^2 + DC^2$$

$$6)\quad AB'^2 + A'C^2 - 2\,AD^2 = BD'^2 + D'C^2$$

Aus der Vergleichung der Gleichungen 5 und 6 lassen sich Schlüsse auf das Verhältniß der Seitensummen der Dreiecke ABC und A'BC machen. Wenn schon auf der linken Seite der Gleichheitszeichen die Seiten der Dreiecke als Flächeninhalt und vermindert um die Größe 2 AD² erscheinen, so ändert dieß an der Richtigkeit der Vergleichung nichts; denn ist der Ueberschuß der Quadrate der beiden Seiten über die nämliche Größe ungleich, so ist dadurch erwiesen, daß die Größen selbst ver-

schieben sind. Das Verhältniß der beiden Gleichungen ist durch folgende Summen-Quadrate

$$BD^2 + DC^2 : BD'^2 + D'C^2$$

angedeutet. Zieht man aus beiden die Quadratwurzeln, so gewinnt man das Verhältniß für die Linien, denen diese Grössen zugehören und man erhält folgende Darstellung

$$\sqrt{BD^2 + DC^2} : \sqrt{BD'^2 + D'C^2}$$

Diese Ausdrücke deuten nun Hypotenusen an, die den Linien BD nnd DC, BD' und D'C, welche als Katheten gedacht werden sollen, zugehören. Nennt man diese Hypotenusen H und H', so gewinnt man folgende Proportion

$$\sqrt{BD^2 + DC^2} : \sqrt{BD'^2 + D'C^2} = H : H'$$

Die Linien BD und DC, BD' und D'C geben nach der Voraussetzung gleiche Summen und sollen Katheten rechtwinkliger Dreiecke seyn. Aus ihnen läßt sich nach der Bemerkung zu §. 489. das Verhältniß der Hypotenusen erschließen, und es ist diejenige die kleinste, welche gleiche Katheten BD und DC hat, und somit ist also

$$\sqrt{BD^2 + DC^2} < \sqrt{BD'^2 + D'C^2}$$

also ist auch die Summe der Seiten der Dreiecke, die durch diese Linien dargestellt werden, nach diesen Schlüssen zu beurtheilen, und es ist daher

$$BA + AC < BA' + A'C$$

Diese Schlüsse bleiben immer richtig, so nahe A'D' auch an AD fallen mag; und sind es auch dann, wenn die Höhe A'D' ausserhalb der Grundlinie errichtet wird, wo sich übrigens der Beweis auf einfachere Sätze zurückführen läßt.

Anmerkung. Da durch eine Seite und die ihr zugehörige Höhe eines Dreiecks der Inhalt eines Dreiecks bestimmt wird und unzählige Dreiecke gebildet werden können, welche Grundlinie und Höhe miteinander gemeinschaftlich, also gleichen Inhalt haben, so wird man durch diese Bemerkung und durch die Schlüsse in der Beweisführung zur vorliegenden Aufgabe zu der Behauptung geführt: daß unter allen Dreiecken von gleicher Grundlinie und Höhe, oder gleichem Inhalt bei einerlei Grundlinie, das gleichschenklige die kleinste Seitensumme habe.

Werden nun zwischen den beiden Parallelen BM und AK in beliebigen Entfernungen von D, dem Mittelpunkte der Grundlinie BC, senkrechte Linien A'D', A''D'' . . . . errichtet und aus ihnen in Verbindung mit den Endpunkten B und C der Linie BC Dreiecke gebildet, so schließt sich hier unmittelbar die Folgerung an: daß die Seitensummen dieser Dreiecke zunehmen werden, und zwar um so mehr, je weiter die Entfernungen der Höhenpunkte von einander liegen.

Sollte sich zu dem Wachsthume der Entfernung auch noch das Wachsthum des Flächeninhaltes der Dreiecke bei unveränderter Grundlinie gesellen, so könnte dieß nur unter der Bedingung geschehen, daß die Seitensummen in höherem Maaße zunehmen müßten.

Ein Größtes gibt es unter den genannten Bedingungen nicht.

§. 497.

Aufgabe. Es ist die Hypotenuse gegeben. Man soll über ihr ein rechtwinkliges Dreieck bilden, worin die Summe des kleinern Abschnittes und der Höhe ein Größtes ist. Fig. 566.

Auflösung. Die Hypotenuse sey BC. Man beschreibe über ihr einen Halbkreis BAC und errichte in dem Mittelpunkte M der Hypotenuse BC eine senkrechte Linie bis zum Durchschnitte A der Peripherie, vollende das Dreieck BAC, so ist es das gesuchte.

Beweis. Die Linie MA ist die Höhe des Dreiecks BAC, und zugleich nach §. 492. die größt mögliche Höhe, welche irgend ein rechtwinkliges Dreieck über der Hypotenuse BC erhalten kann. Die Linie MC ist der Abschnitt im Dreiecke BAC und hat die größt mögliche Länge, welche der kleinere Abschnitt erhalten kann. Hieraus zeigt sich also, daß das rechtwinklige gleichschenklige Dreieck BAC die Bedingungen der Aufgabe erfüllt und die Summe beider Linien ein Größtes erzeugt.

§. 498.

Aufgabe. Es ist die Hypotenuse gegeben. Man

soll über ihr ein rechtwinkliges Dreieck bilden, worin die Summe des größern Abschnittes und der Höhe ein Kleinstes ist. Fig. 566.

Auflösung. Die Hypotenuse sey BC. Man beschreibe über ihr einen Halbkreis BAC und errichte im Mittelpunkte M die Linie MA senkrecht bis zum Durchschnitte A der Peripherie und ziehe AB und AC, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Man errichte auf irgend einem andern Punkte D der Hypotenuse BC die Linie DE senkrecht und vollende das rechtwinklige Dreieck BEC, so ist zu zeigen, daß die Summe der Linien BM und MA zusammen größer, als die der Linien BD und DE' sey Dieß ist leicht, wenn man berücksichtigt, daß die Höhe in einem rechtwinkligen Dreiecke immer größer als der kleinere Abschnitt ist.

Da nun BM der Abschnitt im Dreiecke BAC, BD der im Dreiecke BEC und $BM < BD$ und $MC < ME$ ist, so folgt unmittelbar hieraus

$$BM + MA < BD + DE$$

Die Schlüsse, welche hier von dem Dreiecke BEC gemacht wurden, gelten von jedem andern Dreiecke, dessen Abschnitt größer als BM ist und sind also allgemein. Demnach hat das auf die angegebene Art gebildete Dreieck die kleinste Summe der Höhe und des größern Abschnittes.

Anmerkung. Das Dreieck BAC ist gleichschenklig. Hieran schließen sich also aus diesem und dem vorhergehenden § die weitern Folgerungen:

Unter allen rechtwinkligen Dreiecken, die eine gemeinschaftliche Hypotenuse haben, hat das gleichschenklige die größte Summe der Höhe und des kleinern Abschnittes, und die Hypotenuse ist das Maximum dieser Summe.

Unter allen rechtwinkligen Dreiecken, die eine gemeinschaftliche Hypotenuse haben, hat das gleichschenklige die kleinste Summe für den größern Abschnitt und die Höhe, und die Hypotenuse ist das Minimum dieser Summe.

Zusatz. Die Behauptung: daß in einem rechtwinkligen Dreiecke die Höhe größer als der kleinere Abschnitt sey, rechtfertigt sich leicht auf folgend Art Fig. 567:

Es

Es sey über der Hypotenuse BC ein ungleichseitiges rechtwinkliges Dreieck BEC gebildet und von seiner Spitze E die Höhe ED bis zum Durchschnitte G des um das Dreieck umschriebenen Kreises, und ferner der Durchmesser FA senkrecht durch den Mittelpunkt der Hypotenuse gezogen, so theilen die beiden Durchmesser die Peripherie in vier gleiche Theile und es ist also der Bogen BA = FC; ferner ist der Bogen BE, der durch die Höhe DE des ungleichseitigen Dreiecks vom Halbkreis BAC abgeschnitten wird, größer als BA, dagegen ist der Bogen GC kleiner als FC, oder kleiner als BE, und zwar um den doppelten Bogen AE.

Nun steht der Winkel BCE im Dreieck BEC mit seinen Schenkeln auf dem Bogen BE, der Winkel DEC aber auf dem Bogen GC auf. Da nun in einem Kreise dem größern Bogen der größere Peripheriewinkel zugehört und der Bogen BE größer als der Bogen GE ist, so ist der Winkel BCE größer als der Winkel GEC. Geht man nun von dem Dreiecke BEC auf das rechtwinklige Dreieck DEC über, so geht aus dem Gesagten hervor, daß der Winkel bei C größser ist, als der bei E. Da nun dem größern Winkel die größere Seite entgegensteht, so folgt hieraus, daß

$$DE > EC$$

ist. Diese Schlüsse gelten von jedem Dreiecke; bestätigen also die Richtigkeit der aufgestellten Behauptung allgemein.

§. 499.

Aufgabe. Es ist eine Hypotenuse gegeben. Man soll über ihr ein rechtwinkliges Dreieck bilden, worin die Summe des größern Abschnittes und der Höhe ein Größtes ist. Fig. 568.

Auflösung. Die Hypotenuse sey BC. Man beschreibe über der Hypotenuse einen Halbkreis und lege in ihrem Mittelpunkt M einen Winkel von 45° an, verlängere seinen Schenkel MA bis zum Durchschnitte A der Peripherie, ziehe AB und AC, so ist BAC das gesuchte rechtwinklige Dreieck.

Beweis. Man bilde irgend ein rechtwinkliges Dreieck BFC, ziehe durch den Punkt A zu MA eine senkrechte Linie GAE, verlängere die Hypotenuse BC bis zum Durchschnitte E mit der Linie GE, ziehe die Höhe AD und durch die Spitze F

des Dreiecks BFC die Linie GD′ senkrecht auf BC; so ist die Linie GAE eine Tangente, die mit dem Kreise nur den Punkt A gemeinschaftlich hat. Demnach ist also die Linie GD′ größer als FD′. Ferner ist das Dreieck MAE, wegen des Winkels bei A, rechtwinklig und zugleich, da der Winkel AME $= \frac{1}{2}$ R ist, gleichschenklig, also ist auch der Winkel MEA = AME $= \frac{1}{2}$ R. Aus dem nämlichen Grunde sind auch wegen der rechten Winkel bei D und D′ die Dreiecke ADE und GDE rechtwinklig und gleichschenklig, also ist die Linie

$$AD = DE \text{ und } GD' = D'E$$

demnach auch $BD + AD = BD + DE$

d. h. die Summe des größern Abschnittes und der Höhe in dem Dreiecke BAC ist der Linie BE gleich. Nun ist auch

$$BD' + D'G = BE$$

da aber D′F kleiner als D′G ist, so ist auch

$$BD' + D'F < BE$$

Die Linie BD′ ist der Abschnitt und D′F die Höhe in dem Dreiecke BFC, also ist die Summe der Höhe und des größern Abschnittes in dem Dreiecke BFC kleiner, als die im Dreiecke BAC.

Diese Schlüsse gelten von jedem Dreiecke, dessen Spitze nicht in dem Punkte A liegt, und die Summe der Abschnitte und Höhen aller möglichen rechtwinkligen Dreiecke, welche über der genannten Hypotenuse liegen, werden die Summe des auf die angegebene Weise gebildeten Dreiecks nicht erreichen; folglich hat dieses unter ihnen die größt möglichste Summe des Abschnittes und der Höhe.

Anmerkung. Die Größe der Linie BE, oder das Maximum, welches die Summe der Höhe und des Abschnittes erreichen kann, läßt sich leicht bestimmen, wenn man berücksichtigt, daß

$$BE = BM + ME$$

ist. Es ist nämlich BM die Hälfte der gegebenen Hypotenuse und ME die Hypotenuse des rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks MAE, dessen Katheten der halben Hypotenuse gleich sind. Nennt man die Hypotenuse H und die Summe der Höhe und des größern Abschnittes S, so ist

$$S = \tfrac{1}{2}H + \sqrt{\tfrac{1}{4}H^2 + \tfrac{1}{4}H^2} = \tfrac{1}{2}H + \sqrt{\tfrac{1}{2}H^2}$$
$$= \tfrac{1}{2}H + H\sqrt{\tfrac{1}{2}} = H\left(\tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)$$

§. 500.

Aufgabe. Es ist die Hypotenuse gegeben. Man soll über ihr ein rechtwinkliges Dreieck bilden, worin die Summe der kleinern Kathete und des größern Abschnittes ein Größtes sey. Fig. 569.

Auflösung. Die gegebene Hypotenuse sey BC. Man beschreibe über ihr einen Halbkreis BAC, suche ihren vierten Theil DC und errichte in D eine senkrechte Linie DA bis zum Durchschnitte A der Peripherie des Halbkreises, ziehe AB und AC, so ist BAC das gesuchte Dreieck und BD + AC ein Größtes.

Beweis. Der Beweis für die Richtigkeit dieser Construction läßt sich leicht aus der §. 129. gegebenen analytischen Auflösung herleiten, worin für die Bestimmung der kleinern Kathete aus der Hypotenuse und aus der Summe der Kathete und des nicht anliegenden Abschnittes gegeben ist. Die Gleichung für diese ist

$$K = \frac{1}{2}H + \sqrt{(\frac{5}{4}H - S)H}$$

Aus dem Ausdruck unter dem Wurzelzeichen lassen sich die Bedingungen für die Möglichkeit der Aufgabe ableiten. Sie ist nämlich so lange möglich, als der Ausdruck einen positiven Werth liefert; unmöglich, wenn er einen negativen Werth liefern sollte. Dieß gibt die Grenze für die Möglichkeit, also auch für den Fall, wenn die constituirenden Elemente ihr Größtes erreichen; und dieß ist der Fall, wenn der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen in O übergeht, also wenn

$$\sqrt{(\frac{5}{4}H - S)H} = O$$

ist. Hieraus leitet sich die Gleichung

$$\frac{5}{4}H - S = O$$

oder

$$\frac{5}{4}H = S$$

ab, und letztere zeigt, da S die Summe der Kathete und des nicht anliegenden Abschnittes $\frac{5}{4}$ von der Hypotenuse nicht überschreiten kann, daß sie das Größte für die Summe beider ist, wenn sie zusammen $\frac{5}{4}$H betragen. Wird dieser Werth

für S in obige Gleichung gesetzt, so bestimmt sich sofort die kleinere Kathete leicht und sie ist alsdann

$$K = \frac{1}{2}H$$

Da nun der anliegende Abschnitt a die dritte Proportionale zu der Kathete und der Hypotenuse ist, so ergibt sich

$$a = \frac{1}{2}H \cdot \frac{1}{2}H : H = \frac{1}{4}H$$

und folglich ist der größere

$$A = H - a = \frac{3}{4}H$$

Das Dreieck BAC ist nach diesen Bestimmungen gebildet; erfüllt also die Bedingungen der Aufgabe, und die Summe von BD + AC ist ein Größtes.

§. 501.

Aufgabe. Es ist die Summe der Grundlinie und Höhe gegeben. Man soll daraus ein gleichschenkliges Dreieck bilden, worin der Schenkel ein Kleinstes ist. Fig. 570.

Auflösung. Die gegebene Summe sey BC. Man theile sie in fünf Theile und bemerke den Punkt E, welcher einen Theil EC und vier Theile BE von einander trennt, bilde aus BE, als Grundlinie, und EC, als Höhe, das gleichschenklige Dreieck ABE, so ist dieses das gesuchte.

Beweis. Die Richtigkeit dieser Construction wird aus folgender Untersuchung erhellen: Nennt man den Schenkel K, die Summe der Grundlinie und Höhe S, die Grundlinie x, so ist die Höhe S — x. Da nun ein gleichschenkliges Dreieck in zwei rechtwinklige getheilt wird, wovon jedes die Höhe und die halbe Grundlinie zu Katheten hat, so ist nach dem pythagoraischen Lehrsatze

$$K^2 = (S - x)^2 + \frac{1}{4}x^2$$

Durch Entwicklung erhält man

$$K^2 = S^2 - 2Sx + x^2 + \frac{1}{4}x$$

oder $$4K^2 - 4S^2 = 5x^2 - 8Sx$$

oder $$\frac{1}{5}(4K^2 - 4S^2) = x^2 - \frac{8}{5}Sx$$

Wird $(\frac{4}{5} S)^2$ auf beiden Seiten zugezählt, so entsteht

$$\frac{4}{5} K^2 - \frac{4}{5} S^2 + \frac{16}{25} S^2 = (x - \frac{4}{5} S)^2$$

und hieraus

$$x = \frac{4}{5} S - \sqrt{\frac{4}{5} K^2 - \frac{4}{25} S^2}$$

Aus dem Ausdruck unter dem Wurzelzeichen läßt sich nun das Verhältniß der Größe zwischem dem Schenkel und der Summe der Höhe und Grundlinie erforschen.

Die Aufgabe ist nämlich nur so lange möglich, als der Ausdruck $\sqrt{\frac{4}{5} K^2 - \frac{4}{25} S^2}$ einen positiven Werth bezeichnet, sie wird unmöglich, sobald er negativ werden sollte. Nimmt man nun, wie es die Bedingungen der Aufgabe erfordern, die Summe der Höhe und Grundlinie als bestimmt, oder unveränderlich und den Schenkel für veränderlich an; so muß, wenn die Aufgabe möglich seyn soll, $\frac{4}{5} K^2 > \frac{4}{25} S^2$ oder $\frac{4}{5} K^2 = \frac{4}{25} S^2$ seyn. Im letztern Falle wird der Wurzelausdruck gleich 0 werden. Soll daher der Werth dieses Ausdrucks positiv werden, so muß er in allen andern Fällen größer seyn, als in dem Falle, wenn der Ausdruck $\sqrt{(\frac{4}{5} K^2 - \frac{4}{25} S^2)}$ in 0 übergeht. Hieraus folgt also unmittelbar, daß in dem Falle, wo der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen in 0 übergeht, der Schenkel des gleichschenkligen Dreiecks ein Kleinstes wird. Führt man daher diesen Werth in obige Gleichung ein, so bestimmt sich hieraus die Größe für die Grundlinie für den Fall, wenn der Schenkel ein Kleinstes wird, und es ist

$$x = G = \frac{4}{5} S$$

und die Größe für die Höhe

$$h = S - x = S - \frac{4}{5} S = \frac{1}{5} S$$

Nach diesen Bestimmungen ist das gleichschenklige Dreieck ABE gebildet, folglich ist sein Schenkel ein Kleinstes, und hieraus folgt zugleich, daß alle gleichschenklige Dreiecke, welche mit dem Dreiecke ABE gleiche Summe der Grundlinie und Höhe, aber verschiedene Grundlinie oder Höhe haben, größere Schenkel haben müssen.

§. 502.

Aufgabe. Es ist die Hypotenuse gegeben. Man soll über ihr ein rechtwinkliges Dreieck bilden, worin der Ueberschuß des Höhenquadrates über das Quadrat des kleinern Abschnittes ein Größtes ist. Fig. 569.

Auflösung. Die Hypotenuse sey BC. Man beschreibe über ihr einen Halbkreis, suche ihren vierten Theil CD und errichte auf seinem Endpunkte D die senkrechte Linie DA bis zum Durchschnitte A der Peripherie, ziehe die Linien AB und AC, so ist ABC das gesuchte rechtwinklige Dreieck und es ist $AD^2 - DC^2$ ein Größtes.

Beweis. Denkt man sich die Höhe DA in dem Endpunkte C der Hypotenuse, so ist sie 0 und also auch der Unterschied der Quadrate der Höhe und des Abschnittes 0. Entfernt sich aber die Höhe DA von dem Endpunkte C, so gibt es einen Unterschied zwischen den Quadraten der beiden Linien. Dieser verändert sich, bis die Höhe DA in den Mittelpunkt M gelangt ist; dann sind Höhe und Abschnitt einander gleich und es muß also auch der Unterschied ihrer Quadrate 0 werden. Dieß führt zu dem Schlusse: daß zwischen beiden Fällen ein Größtes liegen, und daß es also ein rechtwinkliges Dreieck geben muß, das unter allen über einer gemeinschaftlichen Hypotenuse möglichen Dreiecken den größten Unterschied zwischen den Quadraten der Höhe und des kleinern Abschnittes hat. Das Dreieck wird bestimmt seyn, wenn die Größe des kleinern Abschnittes bestimmt ist.

Dieser bestimmt sich aus der Gleichung 1, §. 135. leicht, wenn die Grundlinie und das Unterschiedsquadrat zwischen der Höhe und dem kleinern Abschnitte gegeben ist, durch folgende Formel

$$x = \tfrac{1}{4}H \pm \sqrt{\tfrac{1}{16}H^2 - \tfrac{1}{2}d^2}$$

Die Gleichung wird unmöglich, sobald der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen eine negative Größe wird. In dem vorgelegten Falle ist die Hypotenuse unveränderlich, die Seite des Unter-

schiedsquadrates aber veränderlich. Dieses kann so lange zunehmen, bis es dem Quadrate des vierten Theils von der Hypotenuse gleich gekommen ist; und dann hat es seine größte Höhe erreicht. Geschieht dieß, so geht der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen in O über und der kleinere Abschnitt wird alsdann durch folgende Gleichung bestimmt.

$$x = \frac{1}{4} H$$

d. h. wird der kleinere Abschnitt in einem rechtwinkligen Dreiecke dem vierten Theile der Hypotenuse gleich, so ist das Unterschiedsquadrat zwischen der Höhe und dem kleinern Abschnitt ein Größtes.

Nach diesen Grundsätzen ist das Dreieck ABC gebildet; also erfüllt es die Forderungen der Aufgabe.

§. 503.

Aufgabe. Es ist die Hypotenuse gegeben. Man soll über ihr ein rechtwinkliges Dreieck bilden, worin der Unterschied zwischen der kleinern Kathete und dem an der andern anliegenden Abschnitt ein Kleinstes ist. Fig. 571.

Erörterung. Berücksichtigt man, daß in einem rechtwinkligen Dreiecke der kleinern Kathete auch der kleinere Abschnitt anliegen, daß mit dem Wachsthum der Kathete auch der anliegende Abschnitt wachsen und der nicht anliegende abnehmen müsse, daß zuerst die Kathete kleiner, als der entgegengesetzte Abschnitt sey, daß sie aber bei fortgesetzter Zunahme größer als der Abschnitt werden müsse, so wird man auf den Schluß geführt: daß die Unterschiede zwischen beiden zuerst positiv und dann negativ werden, daß es einen Punkt geben müsse, worin der Unterschied zwischen beiden von dem Positiven in das Negative übergeht, der also O ist; und daß dieß der Punkt ist, worin beide Linien gleich sind und folglich der Unterschied ein Kleinstes ist.

Diese Bemerkungen führen zu folgender

Analysis. Nennt man die Hypotenuse H, den Abschnitt

x, so ist die entgegengesetzte Kathete auch x, der ihr anliegende Abschnitt aber H — x. Da nun die Kathete die mittlere geometrische Proportionale zwischen der Hypotenuse und dem ihr anliegenden Abschnitte ist, so gewinnt man hieraus folgende Gleichung $x^2 = H(H - x) = H^2 - Hx$

oder $x^2 + Hx = H^2$

Wird $\frac{1}{4}H^2$ auf beiden Seiten zugezählt, so entsteht

$$(x + \tfrac{1}{2}H)^2 = H^2 + \tfrac{1}{4}H^2 = \tfrac{5}{4}H^2$$

und hieraus gewinnt man für den Abschnitt oder die Kathete folgende Formel

$$x = \sqrt{\tfrac{5}{4}H^2} - \tfrac{1}{2}H$$

Construction. Die Hypotenuse sey BC. Man beschreibe über ihr einen Halbkreis BAC und errichte in ihrem Endpunkte B die Hälfte der Hypotenuse $EB = \frac{1}{2}BC$ senkrecht, ziehe EC und beschreibe von dem Punkte E aus mit EB, als Radius, den Kreisbogen BF, welcher die Hypotenuse EC in F durchschneidet, so ist FC die gesuchte Kathete oder der Abschnitt. Diese Linie trage man von dem Punkte C aus, als Sehne AC = FC in den Kreisbogen und ziehe BA, so ist BAC das gesuchte rechtwinklige Dreieck.

Beweis. Da die Linie BE auf BC senkrecht steht, so ist EBC ein rechtwinkliges Dreieck und man gewinnt, da $BE = \frac{1}{2}H$, BC = H ist,

$$EC = \sqrt{EB^2 + BC^2} = \sqrt{H^2 + \tfrac{1}{4}H^2} = \sqrt{\tfrac{5}{4}H^2}$$

Es ist die Linie $FC = EC - EF = EC - \frac{1}{2}H$, ferner ist AC = FC, also ist

$$AC = EC - \tfrac{1}{2}H = \sqrt{\tfrac{5}{4}H^2} - \tfrac{1}{2}H$$

also ist AC die gesuchte Linie und das Dreieck BAC ein rechtwinkliges, worin der Unterschied zwischen der kleinern Kathete und dem größern Abschnitte ein Kleinstes ist, oder worin beide einander gleich sind.

Anmerkung. Ist die Aufgabe vorgelegt: Ein rechtwinkliges Dreieck zu bilden, worin das Unterschieds-Quadrat zwischen dem größern Abschnitte und der kleinern Kathete ein Kleinstes ist, so wird sie auf die nämliche Art gelöst.

§. 504.

Aufgabe. Es ist eine Hypotenuse gegeben. Man soll über ihr ein rechtwinkliges Dreieck bilden, worin der Unterschied zwischen der Kathete und dem anliegenden Abschnitte ein Größtes ist. Fig. 569.

Erörterung. Nimmt man die Kathete sehr klein an, so gehört ihr auch ein kleiner Abschnitt zu, und der Unterschied zwischen beiden wird um so kleiner seyn, je kleiner sie selbst sind. Wächst die Kathete endlich so weit, daß sie der Hypotenuse nahe kommt, so wird auch der Abschnitt zugleich wachsen und der Hypotenuse gleichfalls sehr nahe kommen. Der Unterschied verschwindet, wenn beide der Hypotenuse gleich werden. Diese Bemerkungen führen auf den Schluß: daß es für den Unterschied ein Größtes geben müsse.

Dieses Größte läßt sich nach §. 138. aus folgender Gleichung bestimmen, worin der Abschnitt aus der Hypotenuse und dem Unterschied zwischen Kathete und Abschnitt abgeleitet wird,

$$A = \tfrac{1}{2}H - d + \sqrt{(\tfrac{1}{4}H - d)H}$$

Da diese Gleichung nur so lange möglich ist, als der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen einen positiven Werth hat, also so lange $\tfrac{1}{4}H$ größer als d, oder wenigstens eben so groß als d ist, und H eine beständige Größe, d aber eine veränderliche bedeutet; so ist klar, daß d, der Unterschied zwischen Kathete und anliegendem Abschnitt, nicht größer werden kann, als der vierte Theil der Hypotenuse, und daß er seine höchste Größe erreicht hat, wenn er bis zum vierten Theile der Hypotenuse gewachsen ist. Wird dieser Werth für d in obige Gleichung gesetzt, so bestimmt sich hiernach für diesen Fall die Größe des Abschnittes und sie ist für $d = \tfrac{1}{4}H$

$$A = \tfrac{1}{2}H - \tfrac{1}{4}H + 0 = \tfrac{1}{4}H$$

Dieß führt zu folgender

Auflösung. Die Hypotenuse sey BC. Man beschreibe über ihr einen Halbkreis, suche ihren vierten Theil DC und er-

richte in D die Linie DA senkrecht bis zum Durchschnitte A mit der Peripherie des Halbkreises, ziehe AB und AC, so ist das Dreieck ABC ein Dreieck, worin der Unterschied zwischen der kleinern Kathete AC und dem anliegenden Abschnitte CD ein Größtes, nämlich $d = \frac{1}{4}H$, ist.

Anmerkung. Die Kathete AC ist in diesem Falle der halben Hypotenuse gleich. Einen größten Unterschied für die größere Kathete und den kleinern Abschnitt gibt es nicht.

§. 505.

Aufgabe. Es ist die Grundlinie und die Summe der beiden andern Seiten gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden, dessen Flächeninhalt ein Größtes sey. Fig. 561.

Auflösung. Die gegebene Grundlinie sey BC, die Summe der beiden andern Seiten DE. Man halbire die gegebene Seitensumme und bilde mit ihrer Hälfte $BA = \frac{1}{2}DE = AC$, als Schenkel, über BC ein gleichschenkliges Dreieck BAC, so ist es das gesuchte Dreieck.

Beweis. Der Beweis für die Richtigkeit dieser Auflösung fällt mit den Folgerungen, welche in der Anmerkung zu §. 496. gemacht wurden, zusammen. Denn da alle Dreiecke, die über einer geraden Linie liegen und gleichen Inhalt, aber ihre Höhenspitzen in verschiedenen Entfernungen von der des Dreiecks BAC liegen haben, in ihren Seitensummen zunehmen; so müssen umgekehrt, Dreiecke, welche gleiche Seitensummen, nothwendig kleinern Flächeninhalt, als das gleichschenklige haben, wenn sie mit ihrer Höhenspitze eine von jenem verschiedene Lage haben. Denn sollte ihr Inhalt dem gleichschenkligen Dreiecke gleich seyn, so müßte nothwendig ihre Seitensumme größer als die gegebene seyn, was den Bedingungen der Aufgabe widerspricht.

Anmerkung. Hieran schließt sich die weitere Folgerung: die Spitzen der Dreiecke, welche über einer und derselben Grundlinie

mit gleicher Seitensumme gebildet sind, liegen zwischen der Grundlinie oder ihrer Verlängerung, und der mit ihr durch die Spitze A des gleichschenkligen Dreiecks BAC parallel gelegten Linie GK. Die Höhe eines jeden unter diesen Dreiecken ist kleiner, als der senkrechte Abstand der beiden Parallelen von einander, oder kleiner als die Höhe des gleichschenkligen Dreiecks, dessen Inhalt ein Größtes ist. Die Höhen fallen um so mehr, je größer die Unterschiede der beiden Seiten werden. Ein Kleinstes gibt es für diese Aufgabe nicht.

§. 506.

Aufgabe. Es ist eine Linie gegeben. Man soll sie in zwei Theile theilen und aus diesen ein Rechteck bilden, daß der Inhalt des hieraus gebildeten Rechtecks der größt möglichste sey. Fig. 572.

Auflösung. Die gegebene Linie sey BC. Man halbire die gegebene Linie und errichte auf den Endpunkten M und C, ihrer Hälfte MC = $\frac{1}{2}$BC, zwei senkrechte Linien MA = MC und CD = MC, und vollende das Rechteck MADC, so ist dieses das gesuchte Rechteck.

Beweis. Es ist klar, daß sich die gegebene Linie BC oft unzählig in zwei ungleiche Theile theilen und daß sich dann aus diesen unter sich verschiedenen Theilen unzählige, der Gestalt und dem Inhalt nach verschiedene, Rechtecke bilden lassen, worin die Summe der beiden anliegenden Seiten immer der gegebenen Linie gleich ist. Die Beweisführung besteht also darin, daß man zeige, daß MADC das größt möglichste Rechteck unter allen sey.

Man beschreibe von dem Mittelpunkt M aus mit MC = $\frac{1}{2}$BC, als Radius, einen Halbkreis BAC, so wird der Halbkreis durch den Endpunkt A der Linie MA gehen, da die Linie MA = MC ist; man nehme ferner willkührlich einen andern Theilungspunkt E der Linie BC an, und bilde aus EC und BE = EG das Rechteck EGKC, verlängere die Linie EG bis

zum Durchschnittspunkt A′ der Peripherie des Halbkreises BA′AC. Beide Linien EA′ und MA stehen senkrecht auf dem Durchmesser BC und liegen zwischen ihm und der Peripherie.

Der Flächeninhalt der beiden Rechtecke MADC und EGKC wird bekanntlich durch das Produkt der beiden anliegenden Seiten ausgedrückt, daher wird der Flächeninhalt des Rechtecks MADC dargestellt durch MC . MA, oder, da MA = MB ist, durch BM . MC, und der des Rechtecks EGKC durch EG . EC, oder, da BE = EG ist, durch BE . EC.

Nun ist bekannt, daß die senkrecht auf dem Durchmesser aufstehende halbe Sehne die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten des Durchmessers ist, also daß $BE . EC = EA'^2$ und $BM . MC = MA^2$ ist.

Dieß führt zu dem Schlusse, daß auch die Flächeninhalte der Rechtecke MD und EK, den Quadraten der Linien MA und EA′ gleich sind und daß also die Flächeninhalte der genannten Rechtecke im nämlichen Verhältnisse zu einander stehen, wie die Quadrate der den Theilpunkten der Linie BC zugehörigen halben Sehnen, daß also folgende Proportion gilt

$$MADC : EGKC = MA^2 : EA'^2$$

Nun ist aus §. 492. bekannt, daß die im Mittelpunkte errichtete senkrechte Linie MA größer ist, als jede andere zum Durchmesser senkrechte Linie EA′ zwischen ihm und der Peripherie, also daß

$$MA > EA'$$

folglich um so gewisser, daß

$$MA^2 > EA'^2$$

Alle Schlüsse, die hier von der Linie EA′ gemacht wurden, lassen sich auf jede andere, nicht im Mittelpunkte senkrecht errichtete, anwenden. Hieraus ergibt sich also der allgemeine Schluß: daß das Rechteck MADC das größte ist, das sich aus zwei Linien bilden läßt, deren Summe der gegebenen Linie BC gleich ist.

Anmerkung. Da bei M und C im Rechteck MADC rechte Winkel und die drei Seiten MA, MC, CK einander gleich sind, so ist das Rechteck MADC ein Quadrat. Durch vorliegenden Be-

weis ist auch folgende Behauptung gerechtfertigt: daß unter allen Rechtecken, bei denen zwei anliegende Seiten gleiche Summen haben, das Quadrat den größten Flächeninhalt hat.

§. 507.

Aufgabe. Es ist ein Winkel und eine Linie gegeben. Man soll die gegebene Linie in zwei Theile theilen, und aus ihnen ein Parallelogramm bilden, das den gegebenen Winkel enthalte und dessen Inhalt ein Größtes sey. Fig. 573.

Auflösung. Der gegebene Winkel sey x, die Linie BC. Man theile die Linie BC in zwei gleiche Theile BM und MC, trage sie auf die Schenkel des gegebenen Winkels so an, daß MN = BM sey und vollende das Parallelogramm MNKC, so ist es das gesuchte.

Beweis. Man nehme an, die Linie BC sey in dem willkührlich gewählten Punkte E in zwei ungleiche Theile BE und EC getheilt und aus ihnen und dem gegebenen Winkel x das Parallelogramm EGKC vollendet, so ist die Linie GE = BE, und GK parallel zu EC, also MN = EG = BE, GN = EM, NA = MA — MN = BM — BE = EM = GN. Das Parallelogramm MADC ist durch die Linie GK in die Parallelogramme ND und MK, und das Parallelogramm EK durch die Linie MN in die Parallelogramme EN und MK getheilt. Das Parallelogramm MNKC ist beiden gemeinschaftlich. Der Beweis für die Richtigkeit der angegebenen Construction ist also darauf zurückgeführt, daß gezeigt werde: das Parallelogramm ND ist größer als EN.

Die beiden Parallelogramme haben bei N gleiche Scheitelwinkel, folglich steht, wie bekannt, ihr Flächeninhalt zu einander in dem Verhältniß der Produkte der anliegenden Seiten, also in folgendem GN . MN : AN . NK

oder, wenn man die unter sich gleichen Linien einführt, in folgendem EM . BE : EM . BM

oder, wenn man die gemeinschaftlichen Factoren ausstößt, in dem Verhältnisse der Linien

$$BE : BM$$

Da nun das Ganze größer ist, als einer seiner Theile, so ist auch

$$BM > BE$$

und folglich auch das Parallelogramm ND > EN, also auch

$$MK + ND > EN + MK$$

oder

$$MADC > EGKC$$

Die Schlüsse, die hier gemacht wurden, gelten noch immer, wenn auch ein anderer Theilungspunkt auf der Linie BC gewählt wird und sind also allgemein. Es ist daher das auf die oben angegebene Art gebildete Parallelogramm das größte unter allen möglichen, die einerley Winkel und die nämliche Summe des umschließenden Seitenpaares haben.

Anmerkung. Das Parallelogramm MADC hat, wie sich leicht erkennen läßt, vier gleiche Seiten, ist also ein Rhombus. Hieraus fließt der Schluß: daß der Rhombus unter allen möglichen Parallelogrammen, die mit ihm einen Winkel und das einschließende Seitenpaar gleich haben, den größern Inhalt hat.

§. 508.

Aufgabe. Es ist eine Linie und ein Winkel gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden, das den gegebenen Winkel enthält, worin die ihn umschließenden Seiten der gegebenen Linie gleich sind und dessen Inhalt der größt mögliche ist. Fig. 574.

Auflösung. Die gegebene Linie sey BC, der Winkel x. Man theile die gegebene Linie in zwei gleiche Theile und bilde aus der Hälfte BA der Linie BC, als Schenkel, und dem gegebenen Winkel, als Scheitelwinkel, das gleichschenklige Dreieck ABE, so ist es das gesuchte.

Der Beweis folgt unmittelbar aus dem des vorigen §, da die gleichschenkligen Dreiecke die Hälften der Rhombus sind,

wenn sie einen Winkel und die ihn umschließenden Seiten gleich haben.

§. 509.

Aufgabe. Es ist eine Linie gegeben. Man soll sie so in zwei gleiche Theile theilen, daß die auf den einzelnen Theilen gebildeten Quadrate die kleinste Summe erzeugen. Fig. 575.

Auflösung. Die gegebene Linie sey BC. Man halbire die gegebene Linie und bilde über ihrer Hälfte BM und MC die Quadrate BEDM und MDFC, so bilden diese die kleinste Summen unter allen über den einzelnen Theilen möglichen Quadratenpaaren.

Beweis. Man nehme auf der Linie BC irgend einen willkührlichen Punkt R an, welcher die gegebene Linie in zwei unter sich ungleiche Theile theilt, und errichte auf ihnen die Quadrate BKPR, RGHC; so ist zu zeigen, daß die Summe der beiden Quadrate BP und RH größer sey, als die der Quadrate BD und MF.

Man denke sich die Summe der Quadrate BP und RH in das Quadrat Q^2 und die der Quadrate BD und MF in das Quadrat S^2 nach dem pythagoräischen Lehrsatze vereinigt, so wird Q die Hypotenuse eines Rechtecks bilden, dessen Katheten die Linien BR und RC, S aber die Hypotenuse eines Dreiecks, dessen Katheten, die unter sich gleiche Linien BM und MC bilden. Da nun bei gleicher Kathetensumme das gleichschenklige rechtwinklige Dreieck die kleinste Hypotenuse hat, so muß auch ihr Quadrat das kleinste unter allen Hypotenusen-Quadraten seyn, die durch die Theilung der Linie BC in zwei Theilen erzeugt werden können. Daher ist also

$$BD + MF < BP + RH$$

Die allgemeine Gültigkeit dieser Schlüsse läßt sich leicht erkennen. Es ist daher die auf die oben genannte Art erzeugte Quadratensumme die kleinste unter allen durch Theilung der Linie BC möglichen.

Anmerkung. Da sich die, über den gegebenen Linien gebildeten, ähnlichen Figuren zu einander, wie ihre Quadrate verhalten, so führt diese Bemerkung zu folgendem Schlusse: Wenn irgend eine gegebene Linie halbirt wird und über ihren Hälften ähnliche Figuren gebildet werden; so ist die Summe ihres Flächeninhaltes kleiner, als die von jedem Paare ihnen ähnlicher Figuren, welche durch eine andere Theilung der Linie in zwei Theile erzeugt werden.

§. 510.

Aufgabe. Es ist ein ungleichseitiges Dreieck gegeben. Man soll in dasselbe ein Parallelogramm beschreiben, das einen Winkel mit ihm gemeinschaftlich hat und dessen Inhalt ein Größtes ist. Fig. 576.

Auflösung. Das ungleichseitige Dreieck sey ABC, der Winkel, welchen das Dreieck und Parallelogramm mit einander gemeinschaftlich haben sollen, sey ABC. Man halbire die drei Seiten des Dreiecks in den Punkten D, E, F, und ziehe von dem Mittelpunkte E, der dem Winkel ABC gegenüberstehenden Seite, auf die Mittelpunkte der beiden andern die Linien ED und EF, so ist BDEF das gesuchte Parallelogramm.

Beweis. Der Winkel ABC ist dem Dreieck ABC und dem Vierecke BDEF gemeinschaftlich. Da die Punkte D und E in den Mittelpunkten der Seiten AB und AC liegen, so halbirt die Linie DE die beiden Seiten des Dreiecks, geht also mit der Linie BC parallel und ist zugleich die Hälfte von BC, die Linie BF ist auch die Hälfte von BC, also ist

$$DE = BF$$

Aus dem nämlichen Grunde geht FE mit BA parallel und ist der Linie BD gleich. Hieraus folgt, daß das Viereck BDEF ein Parallelogramm ist.

Nun ist noch zu beweisen, daß der Flächeninhalt des Parallelogramms BDEF der größt mögliche sey. Zu dem Ende bilde man von dem Punkte e aus ein Parallelogramm Bdef, das

mit

mit dem Dreiecke ABC den Winkel bei B gemeinschaftlich hat, so geht die Seite de zu BC und fe zu BA parallel.

Durch die Bildung des Parallelogrammes BDEF sind zwei ähnliche Dreiecke ADE und EFC über der, im Punkte E halbirten, Linie E entstanden. Durch die Bildung des Parallelogrammes Bdef sind über der Linie A die ähnlichen Dreiecke Ade und efC entstanden. Berücksichtigt man nun, daß nach dem vorhergehenden § die Summe der beiden Dreiecke ADE und EFC die kleinst mögliche unter allen Paaren ähnlicher Dreiecke ist, die über der Linie AC möglich sind, und daß der Unterschied zwischen dem Flächeninhalt des Dreiecks ABC und der Summe der beiden Dreiecke ADE und EFC dem Flächeninhalte des Parallelogrammes BDEF gleich ist, so geht daraus hervor, daß

$$BDEF > Bdef$$

ist. Diese Schlüsse lassen sich auf jedes beliebige, von BDEF verschiedene, Parallelogramm anwenden, folglich sind sie allgemein und daher ist der Inhalt des Parallelogramms BDEF unter allen, im Dreiecke ABC möglichen, ein Größtes.

§. 511.

Aufgabe. Es ist ein ungleichseitiges Dreieck gegeben. Man soll in demselben ein Rechteck bilden, dessen Inhalt ein Größtes sey. Fig. 577.

Auflösung. Das ungleichseitige Dreieck sey ABC. Man halbire zwei Seiten des Dreiecks AB und AC und verbinde ihre Mittelpunkte D und E durch die gerade Linie DE, fälle von ihnen auf die dritte Seite zwei senkrechte Linien DF und EG, so ist FDEG das gesuchte Rechteck.

Beweis. Man ziehe von einem der beiden Halbirungspunkten E die Linie EH parallel mit der gegenüberstehenden Seite, so bildet sie das Parallelogramm BDEH, welches nach dem vorigen § das größte unter allen im Dreiecke möglichen Parallelogrammen ist. Aus der Construction geht hervor, daß

die Linie DE mit BC parallel geht, und daß das Rechteck DEGF und das Viereck DEHB zwischen zwei Parallelen liegen und auf der gemeinschaftlichen Linie DE aufstehen, also einander gleich sind. Hieraus folgt also auch, daß das Rechteck FDEG das im Dreiecke ABC größt mögliche ist.

Anmerkung. 1. Da sich ähnliche Figuren, wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten verhalten, und AC = 2 AE = 2EC Fig. 576. ist, so gewinnt man für die Vergleichung des Flächeninhaltes der Dreiecke ADE und EFC mit dem des Dreieckes ABC folgende Proportionen

$$ADE : ABC = 1 : 4$$

und

$$FCE : ABC = 1 : 4$$

Demnach ist der Flächeninhalt des Dreiecks

$$ADE = \frac{1}{4} ABC$$

und

$$FEC = \frac{1}{4} ABC$$

also die Summe des Flächeninhaltes beider Dreiecke

$$\frac{1}{4} ABC + \frac{1}{4} ABC = \frac{1}{2} ABC$$

und der Flächeninhalt des Parallelogrammes

$$BDEF = ABC - \frac{1}{2} ABC = \frac{1}{2} ABC$$

Hieraus ergibt sich also für die Aufgabe dieses und des vorhergehenden § der Schluß: Der größte Flächeninhalt, welchen ein, in ein Dreieck eingeschriebenes, Parallelogramm erreichen kann, ist die Hälfte von dem des umschließenden Dreiecks.

2. Man sieht leicht ein, daß es einerlei ist, welches Seitenpaar Fig. 577. im Dreiecke ABC halbirt wird.

§. 512.

Aufgabe. Es ist eine Linie gegeben. Man soll ein Parallelogramm aus ihr bilden, worin die Summe zweier Nachbarseiten dieser Linie gleich ist, der Inhalt des Parallelogramms aber unter allen, hieraus möglichen, Parallelogrammen der größt mögliche sey. Fig. 578.

Auflösung. Die Summenlinie sey BC. Man halbire diese Linie und bilde aus ihrer Hälfte MC ein Quadrat MEDC, so ist es das gesuchte Parallelogramm.

Erörterung. Nach den Bedingungen der Aufgabe sind mit der nämlichen Seitensumme, unter verschiedenen Winkeln, welche von dem gleichen Seitenpaare eingeschlossen werden, unzählig viele Parallelogramme möglich, wovon jedes unter den Parallelogrammen seiner Art selbst wieder ein Größtes bildet. Diese größten Parallelogramme sind Rhombus. Der Beweis besteht also darin, daß man zeigt: daß das Quadrat unter allen Rhombus, welche mit ihm auf gleicher Grundlinie gebildet sind, den größten Flächeninhalt hat.

Beweis. Man beschreibe von dem Punkte M mit der Hälfte der Seitensumme MC, als Radius, den Kreisbogen BEC, und ziehe auf irgend einem Punkte E des Kreisbogens unter einem beliebigen Winkel FMC den Radius MF, bilde das Parallelogramm MFGC und fälle von dem Punkte F die Linie FK senkrecht auf MC, so ist der Flächeninhalt des Quadrates MEDC

$$P = MC . ME$$

und der des Rhombus MFGC, dessen Höhe FK ist,

$$P' = MC . FK$$

und es verhält sich der Inhalt des Quadrates zu dem des Rhombus

$$P : P' = MC . ME : FK . MC = ME : FK$$

Die Linien ME und FK sind nach §. 492. von der Beschaffenheit, daß $ME > FK$

also ist auch der Flächeninhalt des Quadrates größer, als der des Rhombus.

Die Schlüsse, die hier gemacht wurden, gelten von jedem Rhombus, der über der Linie MC gebildet werden kann, der Winkel bei M mag von jeder beliebigen Größe seyn. Hieraus folgt, daß das Quadrat den größt möglichen Flächeninhalt unter allen Parallelogrammen hat, welche mit ihm ein Seitenpaar gleich, oder die nämliche Summe zweier Nachbar-Seiten haben.

§. 513.

Aufgabe. Es ist die Summe zweier Seiten gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden, das die gegebene Summe enthalte und dessen Inhalt unter allen möglichen Dreiecken der größt mögliche sey. Fig. 579.

Auflösung. Die Summe sey BC. Man halbire die gegebene Summe BC und bilde aus ihrer Hälfte MC, als Kathete, ein rechtwinklig - gleichschenkliges Dreieck MAC, so ist es das gesuchte Dreieck.

Beweis. Der Beweis ergibt sich aus dem des vorigen § sehr leicht, wenn man berücksichtigt, daß sich die Dreiecke als Hälften von Parallelogrammen darstellen lassen; wenn die zwei fraglichen Seiten des Dreiecks, die Nachbarseiten des Parallelogrammes bilden.

§. 514.

Aufgabe. Es ist eine Linie gegeben. Man soll ein Dreieck bilden, dessen Umfang der gegebenen Linie gleich, und dessen Inhalt unter allen möglichen Dreiecken, die den nämlichen Umfang haben, der größt mögliche sey. Fig. 580.

Erörterung. Die gegebene Umfangslinie sey DE. Man nehme willkührlich eine Linie BC an, setze voraus: die Linie BC habe die gesuchte Eigenschaft, unter welcher die Auflösung der Aufgabe möglich ist, und bilde mit dem Ueberschuß des Umfanges DB und CE über der Linie BC ein gleichschenkliges Dreieck BAC, so wird dieses Dreieck unter allen, welche aus der nämlichen Seitensumme über der Linie BC construirbar sind, das größte seyn.

Hieraus folgt, daß das gesuchte Dreieck BAC nur möglich ist, wenn die Seiten BA und AC einander gleich sind.

Geht man nun von der Seite BC auf die Seite AC über und nimmt gleichfalls an, CA habe die verlangte Eigenschaft und D'E' = DE; so wird unter allen über der Linie CA möglichen Dreiecken, bei gleichem Umfange, das gleichschenklige den größt möglichen Inhalt haben.

Hieraus folgt, daß das Dreieck CBA nur dann die Bedingungen der Aufgabe erfüllen könne, wenn auch die Seiten BA und BC einander gleich sind. Vereinigt man die beiden Schlüsse, so führen sie zu der Folgerung, daß die Lösung der vorgelegten Aufgabe nur unter der Bedingung möglich ist, daß BA = BC = CA ist, oder daß alle drei Seiten einander gleich sind.

Auflösung. Man theile die gegebene Umfangslinie in drei gleiche Theile und bilde über ihrem dritten Theile BC ein gleichseitiges Dreieck.

§. 515.

Aufgabe. Es ist eine Linie gegeben. Man soll ein Parallelogramm bilden, dessen Umfang der gegebenen Linie gleich kommt, und dessen Inhalt der größt möglichste unter allen Parallelogrammen ist, die gleichen Umfang haben. Fig. 578.

Auflösung. Die gegebene Linie sey DE. Man bilde über ihrem vierten Theile MC das Quadrat MEDC, so ist es das gesuchte.

Der Beweis führt sich leicht, denn der Umfang ist die doppelte Länge eines Seitenpaares und das Quadrat hat den größten Inhalt unter allen Parallelogrammen, die mit ihm gleiche Seitenpaare haben, also auch unter allen, die mit ihm gleichen Umfang haben.

§. 516.

Aufgabe. Es ist eine Linie und ein Winkel gege-

ben. Man soll ein Dreieck bilden, das den gegebenen Winkel enthalte, dessen Umfang der gegebenen Linie gleich, der Inhalt aber ein Größtes sey. Fig. 581.

Erörterung. Die gegebene Umfangslinie sey KM, der Winkel x. Nimmt man an, das Dreieck BAC erfülle die Bedingungen und der Winkel BAC sey dem gegebenen gleich, so führt dieß leicht zu dem Schlusse: daß der Inhalt des gesuchten Dreiecks dann der größt mögliche seyn werde, wenn die, den Winkel umschließenden, Seiten einander gleich seyn werden, und die dritte Seite die Ergänzung zum gegebenen Summen-Umfange bilden wird. Dieß führt zu folgender

Ersten Auflösung. Man halbire die gegebene Umfangslinie und lege ihre Hälften $AE = AF = \frac{1}{2}KM$ um den gegebenen Winkel $EAF = x$, halbire den Winkel EAF durch die unbestimmte Linie AP und trage an die Endpunkte E und F der Linien AE und AF die Winkel $AFD = AED = \frac{1}{2}R - \frac{1}{4}x$, verlängere ihre Schenkel FD und ED, so werden sie sich in einem Punkte D der Linie AP treffen Nun lege man in dem Punkte D die Linie DC zu AP senkrecht bis zum Durchschnitte B und C mit den Linien AE und AC, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Nach der Construction sind die beiden Dreiecke AFD und AED congruent, also $AD = AD$, und die beiden Linien FD und ED müssen sich daher in einem gemeinschaftlichen Punkte D der Linie AP treffen.

Es ist ferner der Winkel $v = v' = \frac{1}{2}x$, $z = \frac{1}{2}R - \frac{1}{4}x$ und die Winkel bei D rechte, also ist der Winkel

$$m = R - \frac{1}{2}x$$

Geht man von dem Winkel m auf die im Dreiecke DCF über, so ist

$$m = z + z',$$

also

$$z' = m - z = R - \frac{1}{2}x - (\frac{1}{2}R - \frac{1}{4}x)$$
$$= \frac{1}{2}R - \frac{1}{4}x$$

also ist der Winkel $z = z'$ und folglich das Dreieck DCF gleichschenklig und $DC = CF$.

Hieraus folgt, daß

$$AC + CD = AC + CF = AF$$

ist. Aus den nämlichen Gründen ist

$$AB + BD = AB + BE = AE$$

Die Verbindung beider Gleichungen führt zu folgender

$$AB + BD + DC + AC = AB + BC + AC =$$
$$= AE + AF = KM$$

Das Dreieck ABC erfüllt also die Bedingungen der Aufgabe.

Zweite Auflösung. Fig. 582. Man beschreibe über der Liuie KM einen Kreisbogen KAM, der einen Winkel $R + \frac{1}{2}x$ faßt, halbire den Bogen KAM und ziehe von dem Punkte A die Linien KA und AM, halbire sie und errichte in ihren Mittelpunkten E und D senkrechte Linien bis zu ihren Durchschnitten B und C der Linie KM, ziehe AB und AC, so ist ABC das gesuchte gleichschenklige Dreieck.

Beweis. Der Winkel $KAM = R + \frac{1}{2}x$. Die Summe der beiden Winkel an der Grundlinie ist also

$$v + v' = 2R - (R + \tfrac{1}{2}x) = R - \tfrac{1}{2}x$$

Die beiden Dreiecke ADC und DCM sind congruent, also ist $v' = z'$ und $v = z$, also auch

$$z' + z = R - \tfrac{1}{2}x$$

Geht man von den beiden Winkeln z und z' auf den Winkel BAC über, so ist

$$BAC = KAM - z - z' = R + \tfrac{1}{2}x - (R - \tfrac{1}{2}x) = x$$

Das Dreieck BAC enthält also den gegebenen Winkel.

Aus der Congruenz der Dreiecke ADC und DCM, AEB und KEB folgt die Gleichheit der Seiten KB und BA, AC und CM, also ist

$$AB + BC + AC = KB + BC + CM = KM$$

und aus der Congruenz der beiden Dreiecke KAB und ACM die Gleichheit der Linien KB und CM, BA und AC.

Das Dreieck BAC erfüllt nach §. 495 und 596 und ihren Anmerkungen die Bedingungen der Aufgabe.

§. 517.

Aufgabe. Es ist der Umfang und die Höhe gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden, dessen Inhalt unter allen Dreiecken, welche die nämliche Höhe und den nämlichen Umfang haben, der größt mögliche sey. Fig. 583.

Auflösung. Der Umfang sey KM, die Höhe AD. Man errichte in dem Mittelpunkte D der Linie KM die gegebene Höhe AD senkrecht und verbinde ihren Endpunkt mit dem der Umfangslinie durch die Linien AM und AK. Halbire diese Linien und errichte in ihren Mittelpunkten E und F die senkrechten Linien FC und EB bis zu ihren Durchschnitten B und C mit der Umfangslinie KM, ziehe BA und CA, so ist BAC das gesuchte Dreieck.

Der Beweis führt sich aus der Congruenz der gleichschenkligen Dreiecke ACM und KBA, welche zur Gleichheit der Linien KB, BA, AC und CB führen, leicht; denn sie erzeugen ein gleichschenkliges Dreieck, das die gegebene Höhe und den gegebenen Umfang hat und dessen Inhalt nach den schon bekannten Grundsätzen ein Größtes unter allen Dreiecken von gleichen Bedingungen ist.

Anmerkung. Verbindet man mit dieser Aufgabe die in §. 516. gegebene, so leitet sich aus beiden leicht die Folgerung ab: daß das Dreieck, dessen Inhalt bei gegebenem Umfang und bei gegebener Höhe ein Größtes ist, auch dasjenige seyn müsse, worin der Winkel, durch den die Höhe geht, der größt mögliche ist. Demnach ist mit der Auflösung dieser Aufgabe auch die folgende gegeben: Ein Dreieck zu bilden, worin der Winkel, durch dessen Spitze die Höhe geht, ein Größtes ist, wenn Umfang und Höhe gegeben sind.

§. 518.

Aufgabe. Es sind zwei Seiten, der von ihnen eingeschlossene und der gegenüberstehende Winkel

gegeben. Man soll daraus ein Viereck bilden, dessen Umfang von allen Vierecken, die unter diesen Bedingungen möglich sind, der größt mögliche ist. Fig. 584.

Erörterung. Die gegebenen Seiten seyen BD und DC, der eingeschlossene Winkel x, der gegenüberstehende y, BACD sey das gesuchte Viereck. Da durch zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel ein Dreieck an Gestalt und Größe gegeben ist, so ist auch das Dreieck BCD und die Linie BC bestimmt. Von diesem Dreieck BCD hängt daher auch nicht die Lösung obiger Aufgabe ab; sondern von der Beschaffenheit der beiden andern Seiten BA und AC und dem Winkel, der von ihnen eingeschlossen werden soll. Die Aufgabe ist daher nach §. 488. auf den Fall zurückgebracht: über einer geraden Linie ein Dreieck zu bilden, dessen Seitensumme ein Größtes bildet, und das einen gegebenen Winkel an der Spitze habe.

Auflösung. Man bilde aus den beiden Seiten DB und DC und aus dem Winkel x = BDC das Dreieck BDC, beschreibe über der Linie BC einen Kreisbogen BAC, welcher den gegebenen Winkel x faßt, halbire diesen Bogen und ziehe von seinem Halbirungspunkte A auf die Endpunkte B und C der Linien DB und DC die Linien BA und AC, so ist, wie leicht einzusehen, der Umfang des gefundenen Vierecks ein Größtes und erfüllt die Bedingungen der Aufgabe.

Anmerkung. Das, auf die eben angegebene Art, gebildete Dreieck BAC hat auch die Eigenschaft, daß der Inhalt des Dreiecks BAC unter allen, die mit ihm gleiche Grundlinie und gleiche Winkel an der Spitze haben, der größt mögliche ist. Daher wird auf die nämliche Art auch folgende Aufgabe gelöst: Aus zwei Seiten, dem von ihnen eingeschlossenen und dem gegenüberstehenden Winkel ein Viereck zu bilden, dessen Flächeninhalt unter allen Vierecken, welche gleiche Eigenschaften mit ihm gemein haben, das größt mögliche ist.

§. 519.

Aufgabe. Es sind zwei Seiten, der eingeschlossene

und der gegenüberstehende Winkel gegeben. Man soll daraus ein Viereck bilden, das die gegebenen Stücke enthalte und dessen Diagonale unter allen Vierecken von der nämlichen Bedingung die größt mögliche sey. Fig. 585.

Auflösung. Die Seiten seyen BD und DC, der eingeschlossene Winkel x, der gegenüberstehende y. Man bilde aus den gegebenen Seiten und dem eingeschlossenen Winkel x das Dreieck BDC und beschreibe über der Linie BC einen Kreisbogen BAC, der den gegebenen Winkel y faßt, ziehe von dem Punkte D durch den Mittelpunkt M des Kreisbogens eine Linie DMA bis zum Durchschnitte A des Kreisbogens und dann AB und AC, so ist BACD das gesuchte Viereck.

Beweis. Nach der Construction ist der Winkel BCD = x und die umschließenden Linien den gegebenen gleich. Ueber der Linie BC ist ein Kreisbogen beschrieben, welcher den gegebenen Winkel y faßt. Alle Winkel über BC, deren Spitzen in die Peripherie des Kreisbogens BEAE'C fallen, werden mit BDC ein Viereck bilden, welches die beiden Linien und beide Winkel enthält. Denkt man sich nun mit irgend einer beliebigen Diagonale DE einen zweiten Kreisbogen beschrieben, der den ersten durchschneidet, so sind zwei Vierecke BECD und B'E'CD möglich, welche gleich sind. Die Aufgabe liefert daher so lange zwei Vierecke, als der Kreisbogen BAC in zwei Punkten durchschnitten werden kann. Dieß Durchschneiden des Kreisbogens hängt von der Größe der Diagonale ab. Diese kann so lange wachsen, bis ihr Endpunkt den Bogen BAC berührt. Die Aufgabe wird aber unmöglich, wenn die Diagonale so groß angenommen wird, daß sie den Kreisbogen weder berührt, noch durchschneidet.

Hieraus folgt, daß die Größe der Diagonale so gewählt werden muß, daß ihr Endpunkt den Kreisbogen BAC berührt und dieß wird dann der Fall seyn, wenn die auf dem Endpunkte der Diagonale aufgesetzte senkrechte Linie diesen Endpunkt mit dem Kreisbogen gemeinschaftlich hat, oder den Kreis berührt.

Dieß ist aber nur dann der Fall, wenn der Punkt D, von dem die Diagonale ausgeht, mit dem Mittelpunkte in gerader Linie liegt; denn die andern Fälle fordern eine Unmöglichkeit. Das Viereck BACD erfüllt daher die Bedingungen der Aufgabe.

§. 520.

Aufgabe. Es ist eine Diagonale und die zwei ihr gegenüberstehenden Winkel gegeben. Man soll daraus ein Viereck bilden, dessen Umfang unter allen möglichen Vierecken, welche die gleichen Bedingungen erfüllen, der größt mögliche sey. Fig. 586.

Erörterung. Die gegebene Diagonale sey DB, die beiden Winkel x und y. Es läßt sich leicht erkennen, daß die Aufgabe nach §. 488. darauf zurückgeführt ist, über der einen Seite von DB den Winkel x zu bilden, dessen Schenkelsumme ein Größtes ist, und auf der andern ein Gleiches mit dem Winkel y zu thun. Hieraus ergibt sich leicht folgende

Auflösung. Man beschreibe über DB den Kreisbogen DAB, welcher den Winkel x und auf der entgegengesetzten Seite den Bogen DCB, welcher den Winkel y faßt, halbire die beiden Bogen und ziehe von ihren Halbirungspunkten A und C auf die Endpunkte D und B der Linie DB die Linien AD, AB, DC, CB, so ist ADCB das Viereck, welches die gegebene Diagonale und die ihr gegenüber stehenden Winkel enthält und deren Umfang ein Größtes ist.

§. 521.

Aufgabe. Es ist ein Dreieck gegeben. Man soll innerhalb seiner Seiten einen Punkt bestimmen, von dem aus drei, auf die Eckpunkte gezogene, Linien die kleinste Summe bilden unter allen mög-

lichen Linien, die unter den nämlichen Bedingungen gezogen werden können. Fig. 587.

Erörterung. Das Dreieck ABC sey das gegebene, D sey der gesuchte Punkt und AD, DB, DC seyen die gesuchten Linien. Nun läßt sich durch den gegebenen Punkt D eine Linie EF gezogen denken und AD als bestimmt betrachten. Da nun die Summe der beiden Linien BD und CD nur unter der Bedingung ein Kleinstes seyn kann, wenn die Winkel, welche durch die genannten Linien erzeugt werden, nach der Anmerkung zu §. 485. einander gleich sind, so muß der Winkel EDB = FDC seyn. Geht man von der Beschaffenheit dieser Winkel auf die über, welche die Linie AD mit der Linie EF erzeugt, so ist bekannt, daß sie nur dann einen kleinsten Werth erzeugt, wenn sie auf EF senkrecht steht. Diese Bemerkungen führen zu dem Schlusse: daß die drei gesuchten Linien nur dann den Bedingungen der Aufgabe genügen können, wenn der Winkel ADC dem Winkel ADB gleich ist.

Geht man nun zu der Linie CD über und nimmt eine Linie GH durch D gezogen an, so wird die Summe der beiden Linien AD und DB dann ein Kleinstes seyn, wenn der Winkel BDG = ADH, die Linie DC aber dann, wenn sie mit dieser Linie zwei rechte Winkel erzeugt. Dieß führt zu dem Schlusse: daß die drei gesuchten Linien nur dann den Bedingungen der Aufgabe genügen werden, wenn der Winkel CDA dem Winkel CDB gleich ist.

Die gemachten Bemerkungen führen zu dem Schlusse: daß die Auflösung der Aufgabe nur dann möglich ist, wenn die drei Winkel, welche die gesuchten Linien erzeugen, einander gleich sind, also jeder einzelne der dritte Theil von vier Rechten ist, oder 120° beträgt.

Auflösung. Man beschreibe über jeder Seite des gegebenen Dreiecks ABC einen Kreisbogen, welcher einen Winkel von 120° faßt, und ziehe von ihrem Durchschnittspunkte D auf die Eckpunkte B, C und A die Linien DB, DC, DA, so ist die Summe der drei Linien die kleinste unter

allen möglichen Linien, welche nach den Bedingungen der Aufgabe auf die Eckpunkte des Dreiecks gezogen werden können.

§. 522.

Aufgabe. Es ist ein Viereck gegeben. Man soll innerhalb seines Umfanges einen Punkt bestimmen, von dem aus vier, auf die Eckpunkte gezogene, Linien die kleinste Summe erzeugen, welche unter allen, diesen Bedingungen genügenden, Linien möglich ist. Fig. 588.

Auflösung. Das gegebene Viereck sey ABCD. Man ziehe die Diagonalen AC, BD, so ist ihr Durchschnittspunkt E der gesuchte.

Beweis. Man nehme irgend einen andern Punkt F innerhalb des Umfanges des Viereckes an und ziehe in die Eckpunkte die Linien FD, FC, FA, FB, so bilden die Linien FB und FD mit der Diagonale BD ein Dreieck. Da die Summe zweier Seiten eines Dreiecks größer als die dritte ist, so ist

$$FB + FD > BD$$

Aus dem nämlichen Grunde ist

$$AF + FC > AC$$

also ist auch

$$AF + FD + FC + FB > AE + ED + EC + EB$$

Diese Schlüsse gelten von jedem willkührlich gewählten Punkte, sind also allgemein. Es ist also die Richtigkeit der obigen Auflösung gerechtfertigt.

§. 523.

Aufgabe. Es ist eine begrenzte gerade und eine unbegrenzte Linie ihrer Lage nach gegeben, die sich beide nicht durchschneiden. Man soll über der

ersten einen Winkel bilden, dessen Spitze in der unbegrenzten liege, und der unter allen Winkeln ein Größtes sey. Fig. 589.

Auflösung. Die begrenzte Linie sey AB, die unbegrenzte CD. Man beschreibe nach §. 469. einen Kreis, der durch die beiden Endpunkte A und B geht und die unbegrenzte Linie CD berührt, ziehe von ihrem Berührungspunkte E auf die beiden Endpunkte A und B die Linien EA und EB, so ist AEB der gesuchte Winkel.

Beweis. Man ziehe an irgend einen andern Punkt F der Linie CD von A und B die Linien FB und FA, so muß die Peripherie des gezogenen Kreises, da der Kreis die Linie CD nur in dem Punkte E berührt, von beiden Linien durchschnitten werden. Nun ziehe man ferner von dem Durchschnittspunkte G der Linie FB an den andern Endpunkt A der Linie AB die Linie AG, so müssen zwei Dreiecke entstehen, deren Winkel sich vergleichen lassen, und es ist der Winkel

$$AGB = AFB + FAG$$

also

$$AGB > AFB$$

wenn auch der Winkel FAB noch so klein ist. Da nun die Peripheriewinkel in einem und demselben Kreisabschnitte einander gleich sind, so ist der Winkel

$$AGB = AEB$$

also auch

$$AEB > AFB$$

Was von dem einen Punkt F und dem ihm zugehörigen Winkel AFB gesagt wurde, das gilt auch von jedem andern Punkte in der Linie. Demnach ist der Winkel AEB der größte unter allen, die über der Linie AB möglich sind und ihre Spitze in CD liegen haben.

§. 524.

Aufgabe. Es ist ein Kreis und ausser ihm eine begrenzte Linie gegeben. Man soll über ihr einen

Winkel beschreiben, dessen Spitze in der Peripherie des Kreises liege und unter allen möglichen Winkeln ein Größtes sey. Fig. 590.

Auflösung. Der gegebenen Kreis sey DEF, die Linie AB. Man beschreibe nach §. 477. einen Kreis, der durch die gegebenen Punkte geht und den gegebenen Kreis ausschließungsweise berührt, so ist der Punkt D, in welchem er den ersten Kreis berührt, der gesuchte. Zieht man von ihm nach den Endpunkten A und B der Linie AB die Linien DA und DB, so bilden sie den gesuchten Winkel.

Der Beweis führt sich auf eine ähnliche Weise, wie der im vorhergehenden §.

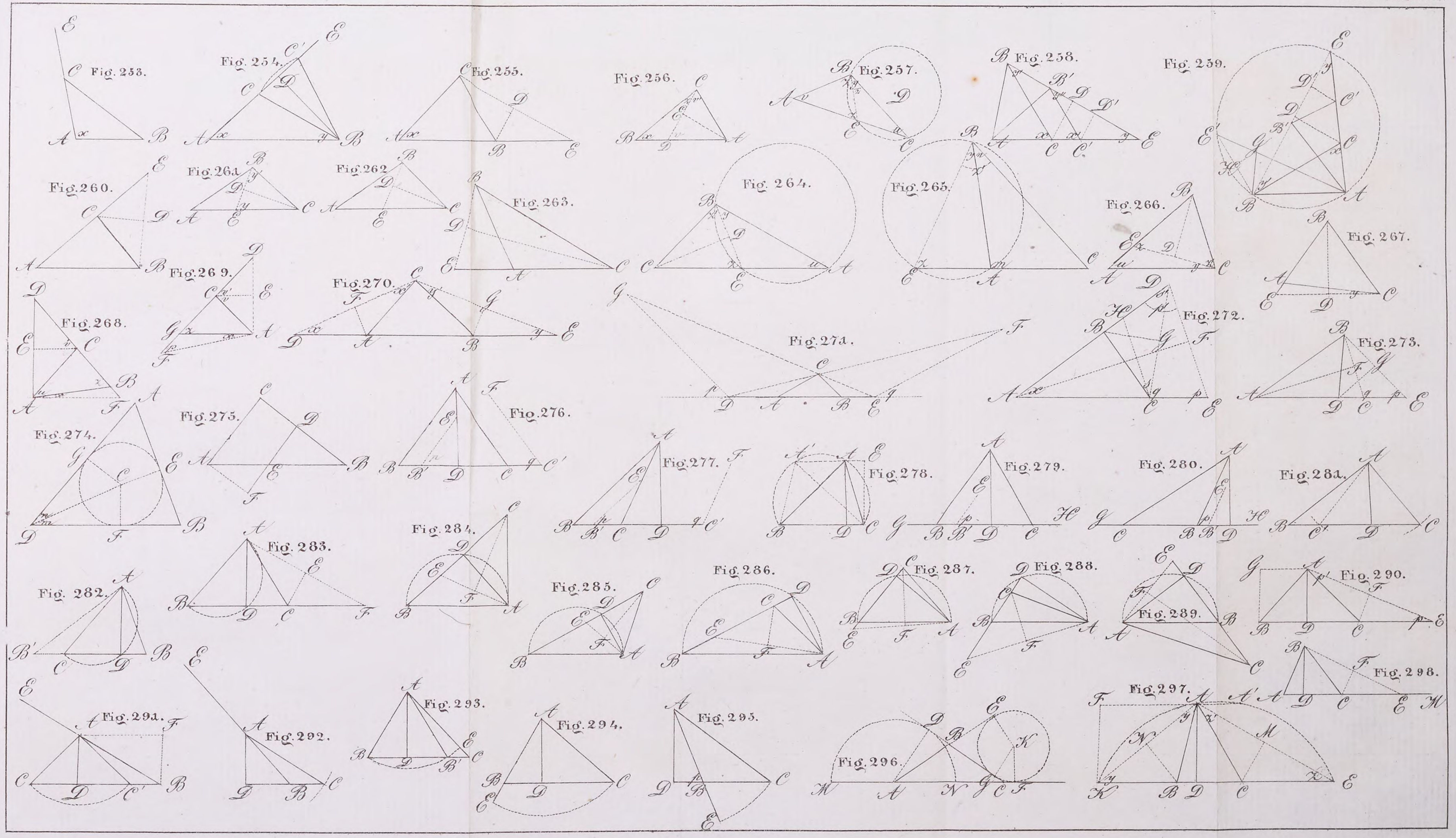


Fig. 253.
Fig. 254.
Fig. 255.
Fig. 256.
Fig. 257.
Fig. 258.
Fig. 259.
Fig. 260.
Fig. 261.
Fig. 262.
Fig. 263.
Fig. 264.
Fig. 265.
Fig. 266.
Fig. 267.
Fig. 268.
Fig. 269.
Fig. 270.
Fig. 271.
Fig. 272.
Fig. 273.
Fig. 274.
Fig. 275.
Fig. 276.
Fig. 277.
Fig. 278.
Fig. 279.
Fig. 280.
Fig. 281.
Fig. 282.
Fig. 283.
Fig. 284.
Fig. 285.
Fig. 286.
Fig. 287.
Fig. 288.
Fig. 289.
Fig. 290.
Fig. 291.
Fig. 292.
Fig. 293.
Fig. 294.
Fig. 295.
Fig. 296.
Fig. 297.
Fig. 298.

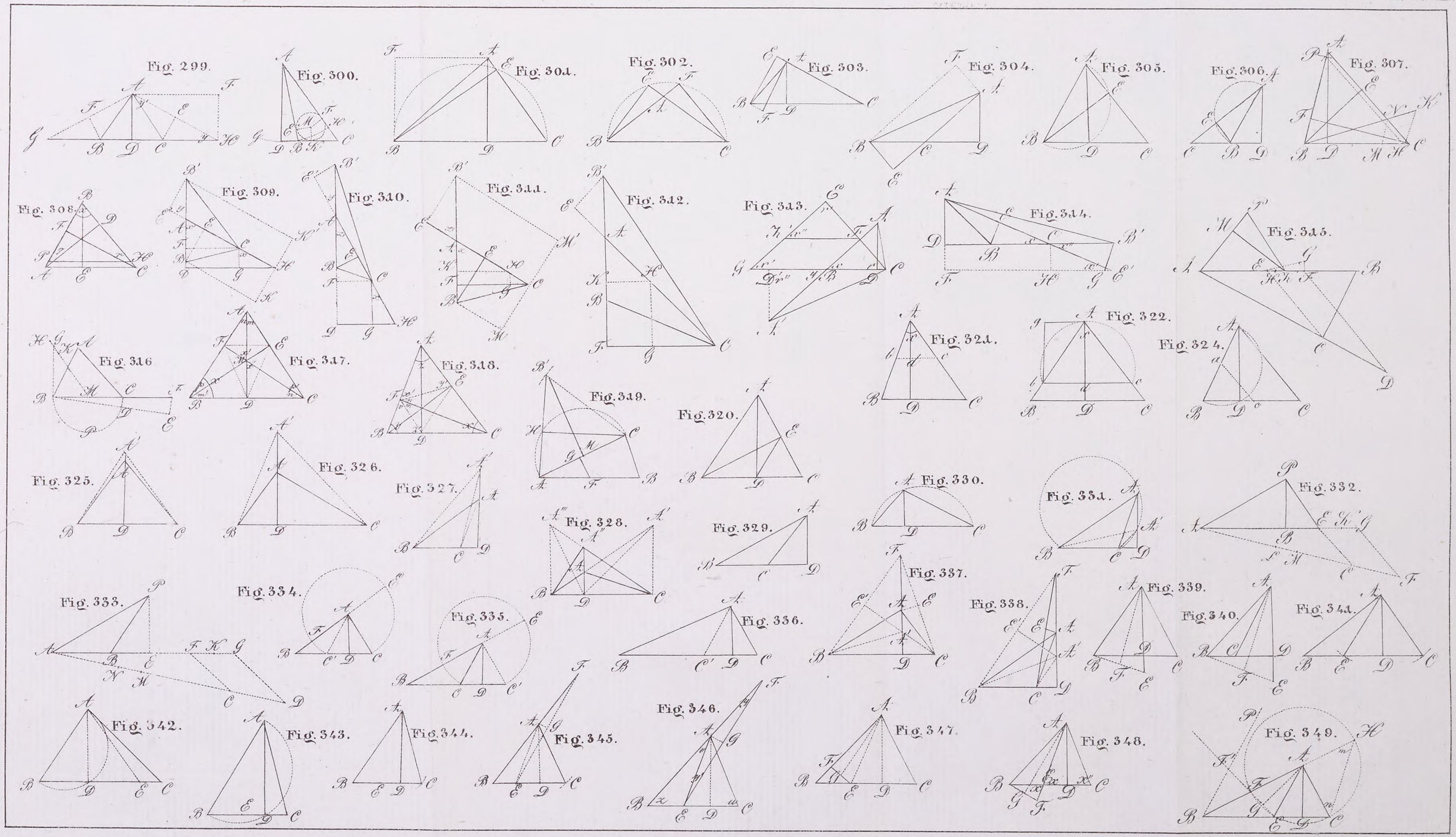


Fig. 299.
Fig. 300.
Fig. 301.
Fig. 302.
Fig. 303.
Fig. 304.
Fig. 305.
Fig. 306.
Fig. 307.
Fig. 308.
Fig. 309.
Fig. 310.
Fig. 311.
Fig. 312.
Fig. 313.
Fig. 314.
Fig. 315.
Fig. 316
Fig. 317.
Fig. 318.
Fig. 319.
Fig. 320.
Fig. 321.
Fig. 322.
Fig. 324.
Fig. 325.
Fig. 326.
Fig. 327.
Fig. 328.
Fig. 329.
Fig. 330.
Fig. 331.
Fig. 332.
Fig. 333.
Fig. 334.
Fig. 335.
Fig. 336.
Fig. 337.
Fig. 338.
Fig. 339.
Fig. 340.
Fig. 341.
Fig. 342.
Fig. 343.
Fig. 344.
Fig. 345.
Fig. 346.
Fig. 347.
Fig. 348.
Fig. 349.

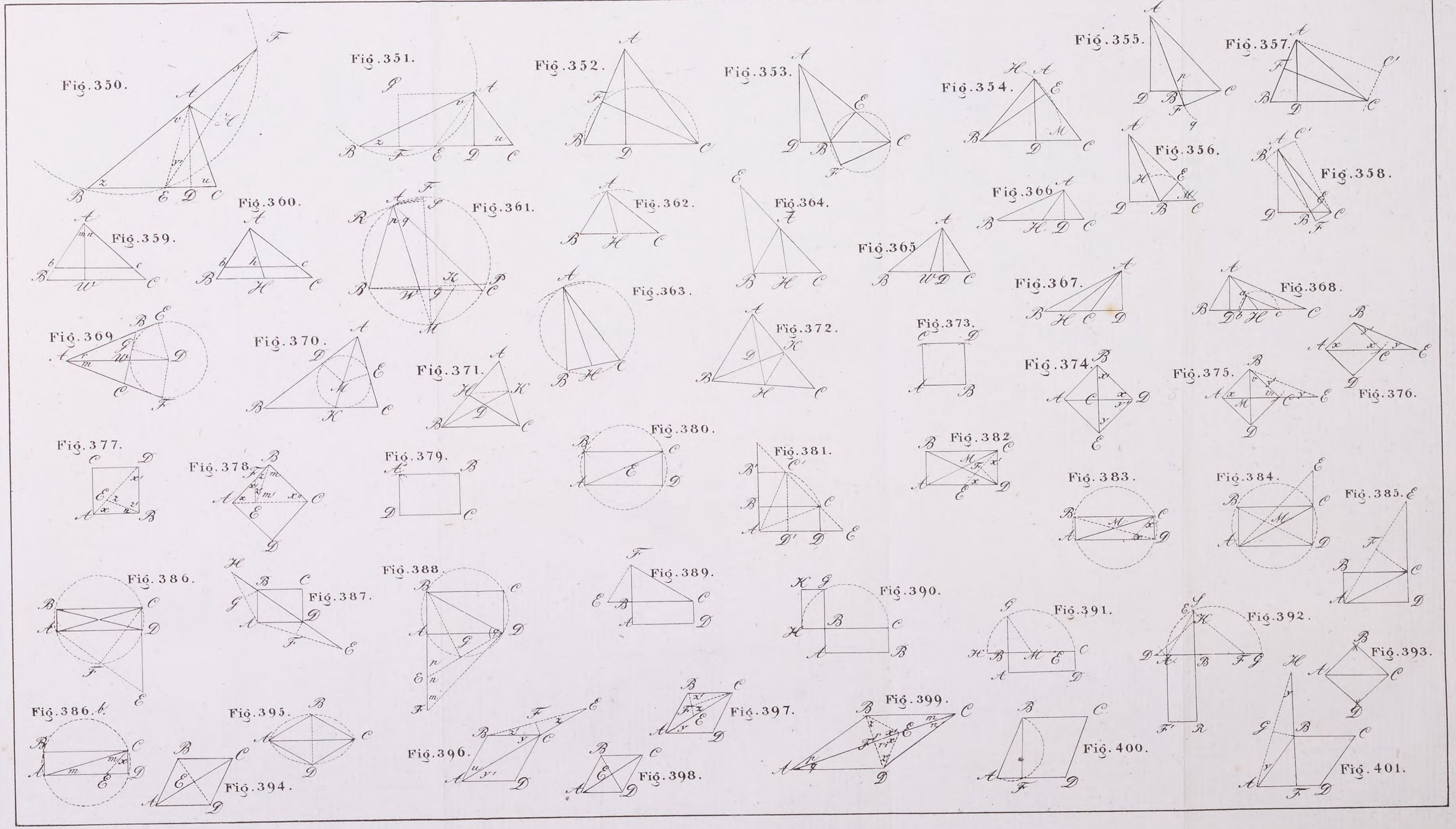


Fig. 350.
Fig. 351.
Fig. 352.
Fig. 353.
Fig. 354.
Fig. 355.
Fig. 356.
Fig. 357.
Fig. 358.
Fig. 359.
Fig. 360.
Fig. 361.
Fig. 362.
Fig. 363.
Fig. 364.
Fig. 365.
Fig. 366.
Fig. 367.
Fig. 368.
Fig. 369.
Fig. 370.
Fig. 371.
Fig. 372.
Fig. 373.
Fig. 374.
Fig. 375.
Fig. 376.
Fig. 377.
Fig. 378.
Fig. 379.
Fig. 380.
Fig. 381.
Fig. 382.
Fig. 383.
Fig. 384.
Fig. 385.
Fig. 386.
Fig. 387.
Fig. 388.
Fig. 389.
Fig. 390.
Fig. 391.
Fig. 392.
Fig. 393.
Fig. 386. b.
Fig. 395.
Fig. 394.
Fig. 396.
Fig. 397.
Fig. 398.
Fig. 399.
Fig. 400.
Fig. 401.

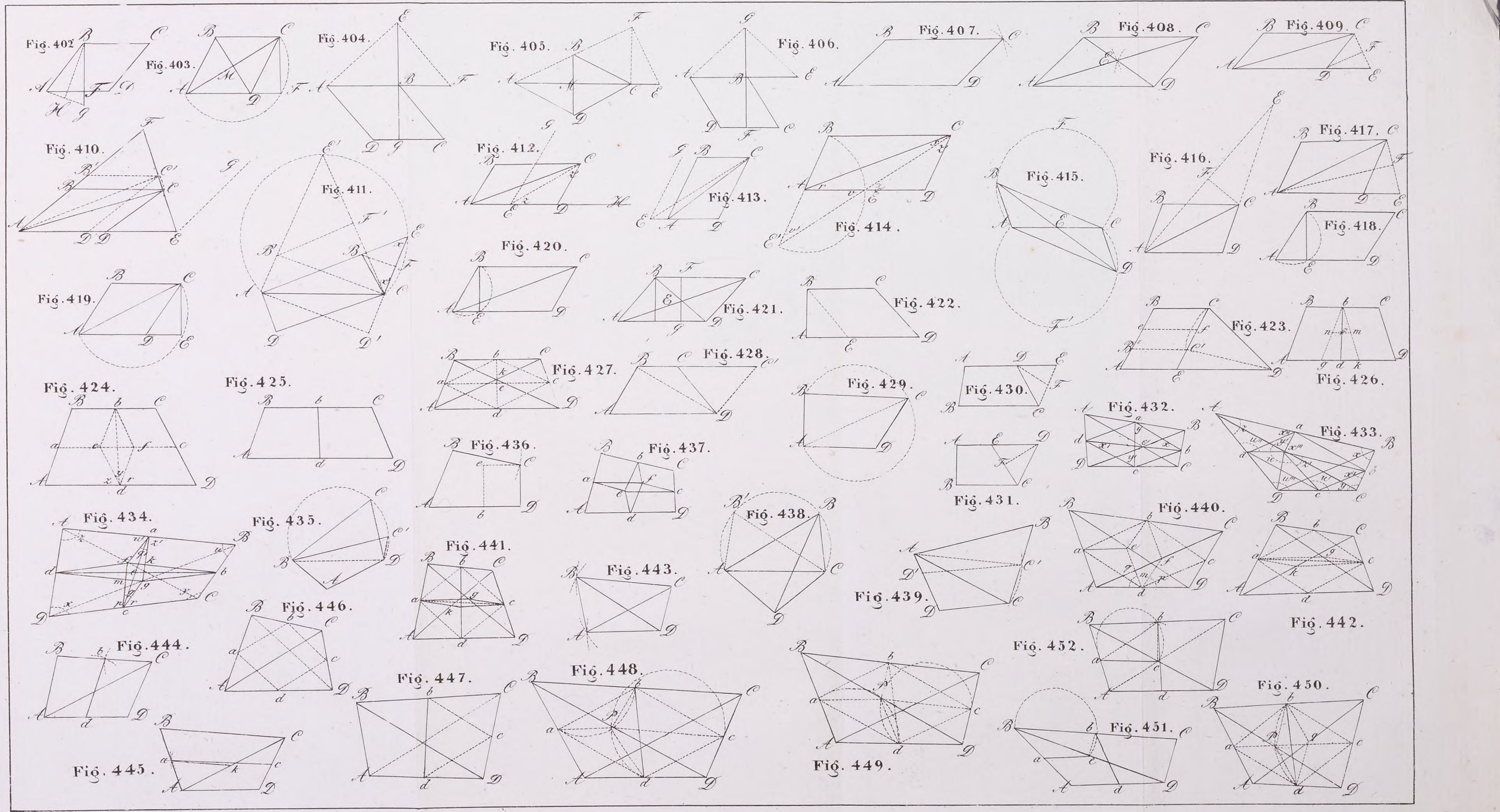


Fig. 402.
Fig. 403.
Fig. 404.
Fig. 405.
Fig. 406.
Fig. 407.
Fig. 408.
Fig. 409.
Fig. 410.
Fig. 411.
Fig. 412.
Fig. 413.
Fig. 414.
Fig. 415.
Fig. 416.
Fig. 417.
Fig. 418.
Fig. 419.
Fig. 420.
Fig. 421.
Fig. 422.
Fig. 423.
Fig. 424.
Fig. 425.
Fig. 426.
Fig. 427.
Fig. 428.
Fig. 429.
Fig. 430.
Fig. 431.
Fig. 432.
Fig. 433.
Fig. 434.
Fig. 435.
Fig. 436.
Fig. 437.
Fig. 438.
Fig. 439.
Fig. 440.
Fig. 441.
Fig. 442.
Fig. 443.
Fig. 444.
Fig. 445.
Fig. 446.
Fig. 447.
Fig. 448.
Fig. 449.
Fig. 450.
Fig. 451.
Fig. 452.

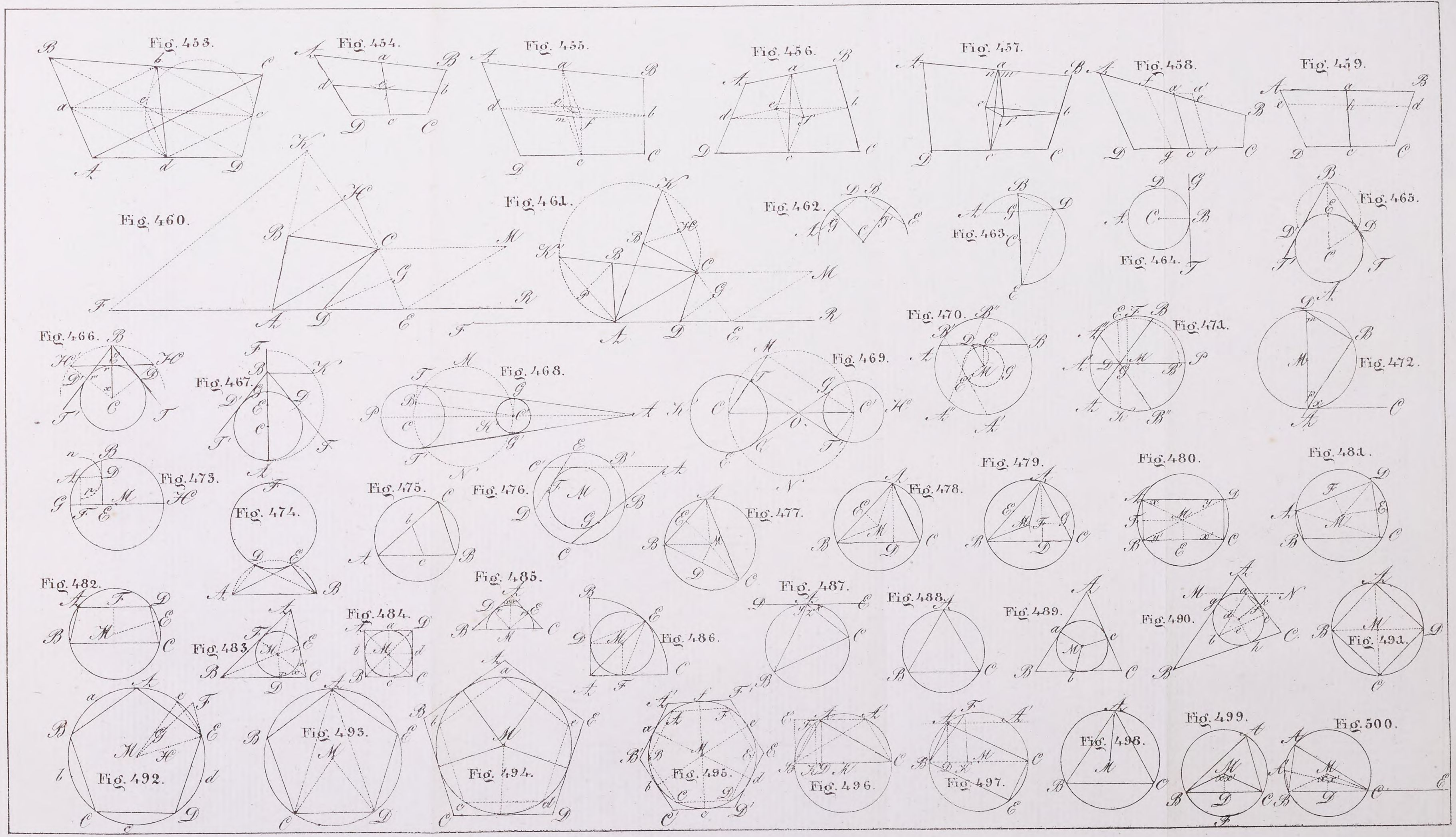
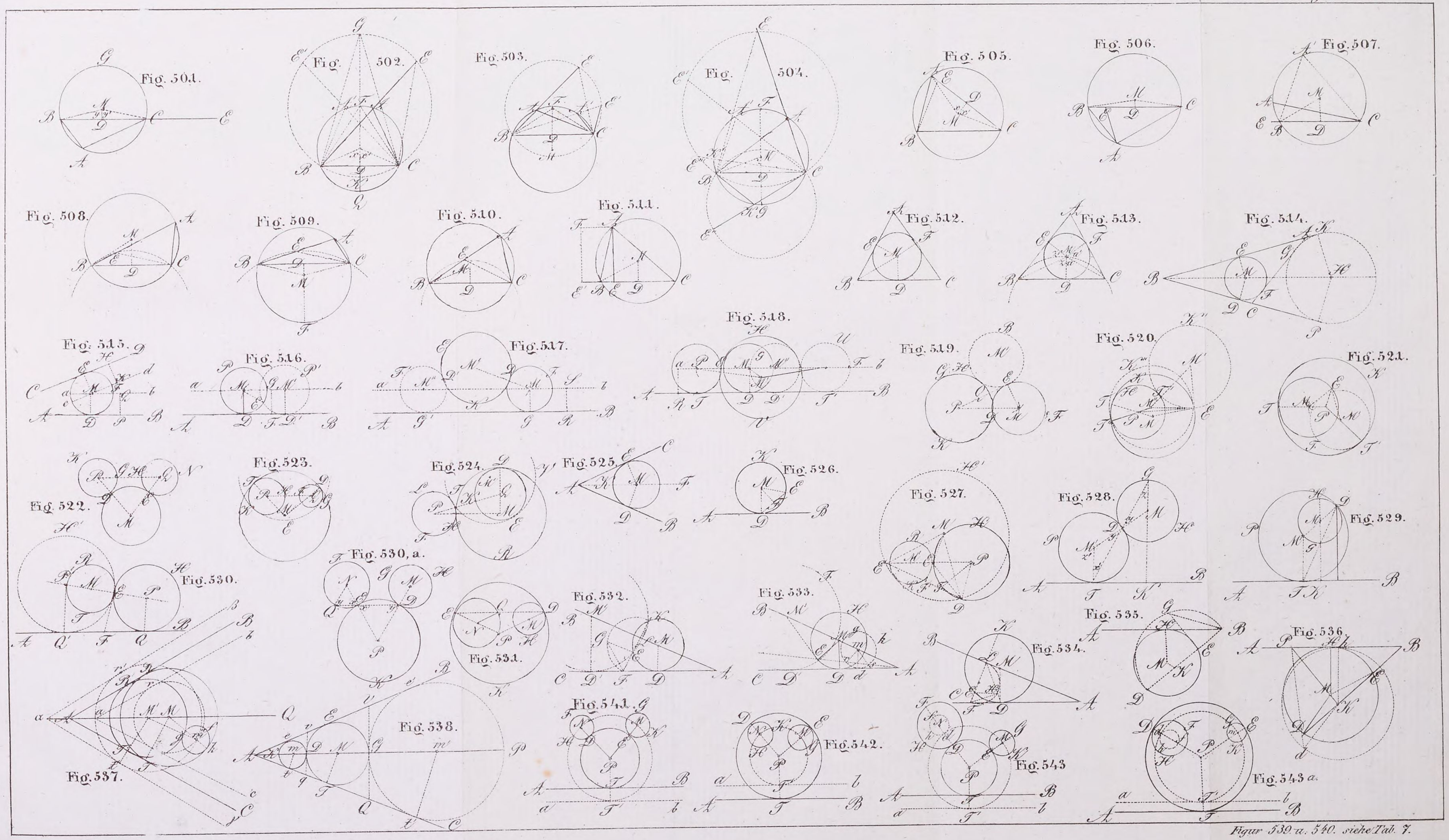


Fig. 453.
Fig. 454.
Fig. 455.
Fig. 456.
Fig. 457.
Fig. 458.
Fig. 459.
Fig. 460.
Fig. 461.
Fig. 462.
Fig. 463.
Fig. 464.
Fig. 465.
Fig. 466.
Fig. 467.
Fig. 468.
Fig. 469.
Fig. 470.
Fig. 471.
Fig. 472.
Fig. 473.
Fig. 474.
Fig. 475.
Fig. 476.
Fig. 477.
Fig. 478.
Fig. 479.
Fig. 480.
Fig. 481.
Fig. 482.
Fig. 483.
Fig. 484.
Fig. 485.
Fig. 486.
Fig. 487.
Fig. 488.
Fig. 489.
Fig. 490.
Fig. 491.
Fig. 492.
Fig. 493.
Fig. 494.
Fig. 495.
Fig. 496.
Fig. 497.
Fig. 498.
Fig. 499.
Fig. 500.



Figur 539 u. 540. siehe Tab. 7.

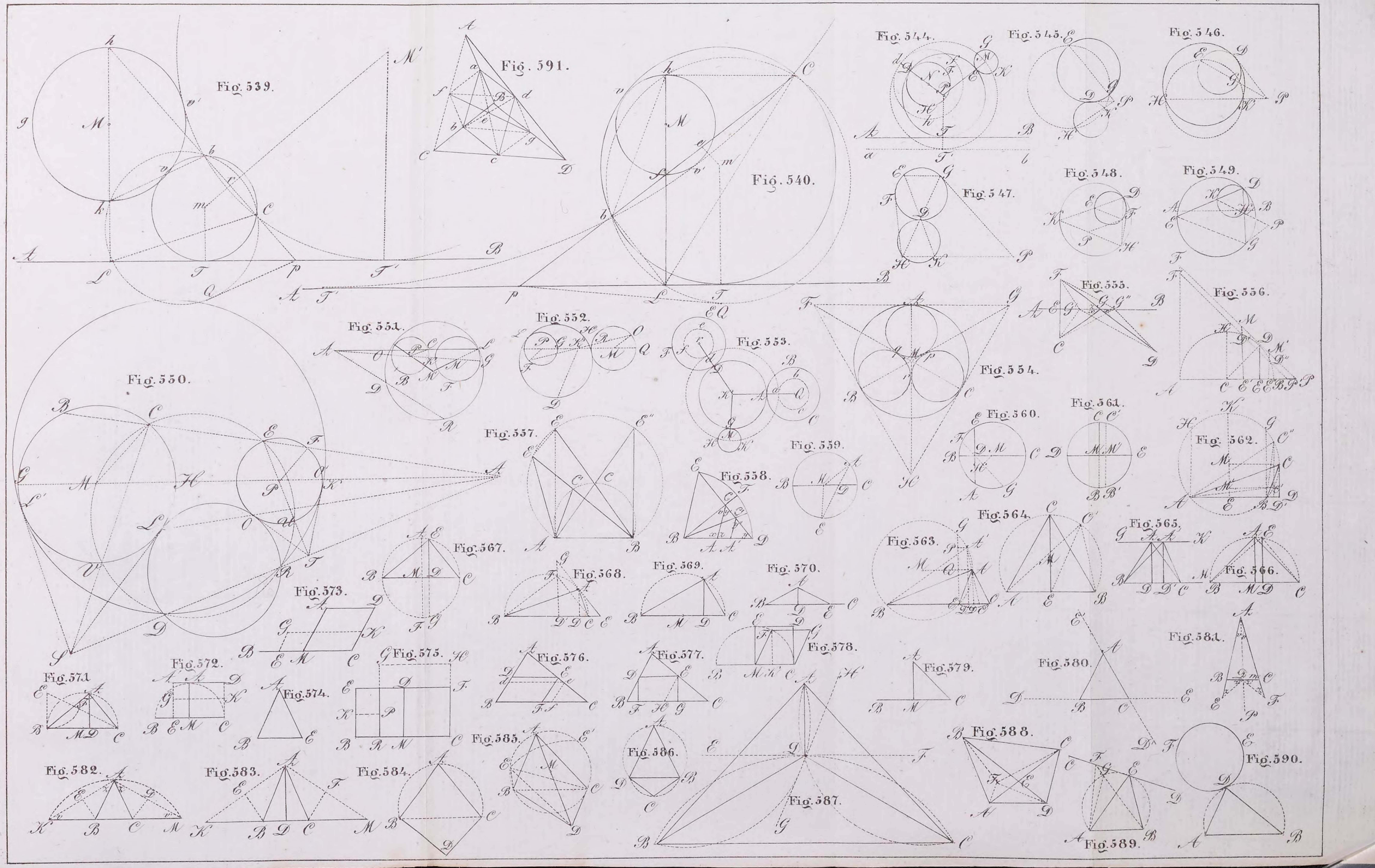


Fig. 539.
Fig. 591.
Fig. 540.
Fig. 544.
Fig. 545.
Fig. 546.
Fig. 547.
Fig. 548.
Fig. 549.
Fig. 550.
Fig. 551.
Fig. 552.
Fig. 553.
Fig. 554.
Fig. 555.
Fig. 556.
Fig. 557.
Fig. 558.
Fig. 559.
Fig. 560.
Fig. 561.
Fig. 562.
Fig. 563.
Fig. 564.
Fig. 565.
Fig. 566.
Fig. 567.
Fig. 568.
Fig. 569.
Fig. 570.
Fig. 571.
Fig. 572.
Fig. 573.
Fig. 574.
Fig. 575.
Fig. 576.
Fig. 577.
Fig. 578.
Fig. 579.
Fig. 580.
Fig. 581.
Fig. 582.
Fig. 583.
Fig. 584.
Fig. 585.
Fig. 586.
Fig. 587.
Fig. 588.
Fig. 589.
Fig. 590.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Oettinger, Ludwig,

Geometrische Aufgaben zum Gebrauch bei Vorlesungen, beim Unterricht an hö
hern Lehranstalten und zum Selbst-Studium

Bd.: 2

Karlsruhe 1832

Passau, Staatliche Bibliothek -- S nv/GL 100-1/2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11341107-5